Задачи к курсу В. Клепцына и Д. Волка.
Лекция 2

Определение 1. *Дифференциальной k-формой* называется формальное выражение

$$\sum_{j_1,\dots,j_k} f_{j_1,\dots,j_k}(\vec{x})\,dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k},$$

определенное в некоторой области пространства $\mathbb{R}^n$. Функции $f_{j_1,\dots,j_k}$, зависящие от n переменных, предполагаются дифференцируемыми столько раз, сколько нужно. Формальная «операция» $\wedge$ внешнего произведения по определению *антикоммутативна*:

$$dx_i\wedge dx_j = -dx_j\wedge dx_i.$$

Поэтому k-форму можно записывать в виде

$$\sum_{j_1<\dots<j_k} f_{j_1,\dots,j_k}(\vec{x})\,dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k}. \tag{1}$$

Сами функции удобно отождествлять с 0-формами.

Задача 1. Почему в каждом слагаемом (1) индексы не повторяются?

Определение 2. *Дифференциалом* функции f называется 1-форма

$$df = \sum_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}} dx_i.$$

Определение 3. *Дифференциалом* k-формы $\omega = \sum_{j_1<\dots<j_k} f_{j_1,\dots,j_k}(\vec{x})\,dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k}$ называется $k+1$-форма

$$d\omega = \sum_{j_1<\dots<j_k} df_{j_1,\dots,j_k}(\vec{x})\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k} =$$

$$= \sum_{j_1<\dots<j_k}\sum_i \left.\frac{\partial f_{j_1,\dots,j_k}}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}} dx_i\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_k}$$

Задача 2. Для любой формы ω выполнено $\boxed{d(d\omega)=0}$.

Указание. Частные производные (для хороших функций) перестановочны: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}$.

Задача 3. Сколько разных слагаемых в записи (1) для k-формы в n-мерном пространстве?

Определение 4. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$. Тогда, используя его компоненты, можно создать как 1-, так и 2-форму:

$$(\text{1-форма})[\vec{v}] = v_1dx_1+v_2dx_2+v_3dx_3,$$

$$(\text{2-форма})[\vec{v}] = v_1dx_2\wedge dx_3+v_2dx_3\wedge dx_1+v_3dx_1\wedge dx_2.$$

Задача 4. a) Чему будет равен дифференциал 2-формы, построенной по полю $\vec{v}$?

Ответ. $d\{(\text{2-форма})[\vec{v}]\} = \operatorname{div}(\vec{v})\cdot dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$.

b) Чему будет равен дифференциал 1-формы, построенной по полю $\vec{v}$?

Ответ. $d\{(\text{1-форма})[\vec{v}]\} = (\text{2-форма})[\operatorname{rot}\vec{v}]$.

c) Убедитесь, что для функции f

$$df = (1\text{-форма})[\operatorname{grad} f],$$

где $\operatorname{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ — градиентное векторное поле.

Задача 5. Сравните утверждение $d(d\omega) = 0$ с утверждениями $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0$ и $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

Задача 6. Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ 2-форму

$$\omega_B = ((\text{послойная 2-форма при каждом } t = t_0)[\vec{B}]) = \\ = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy, \quad (2)$$

Найдите $d\omega_B$.

Задача 7. Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ 2-форму

$$\omega_E = ((\text{послойная 1-форма при каждом } t = t_0)[\vec{E}]) \wedge dt = \\ = E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt, \quad (3)$$

Найдите $d\omega_E$.

В следующих двух задачах вычислите дифференциалы форм, полагая, что поля E и B удовлетворяют 4 уравнениям Максвелла.

Задача 8. Найдите дифференциал dF *тензора напряжённости электромагнитного поля* — 2-формы F на $\mathbb{R}^4$, определённой как

$$F := \omega_B - c\omega_E.$$

Ответ. $\boxed{dF = 0}$ — это инвариантная запись половины уравнений Максвелла.

Задача 9. Рассмотрим 2-форму $*F$:

$$*F := (E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy) - c(B_x dx \wedge dt + B_y dy \wedge dt + B_z dz \wedge dt).$$

Найдите $d * F$.

Ответ. $\boxed{d * F = \frac{4\pi}{c} J,}$ где J — 3-форма в $\mathbb{R}^4$, построенная по 4-вектору тока $(c\rho, j_x, j_y, j_z)$.