Задачи к курсу В. Клепцына и Д. Волка.
Лекция 3

Определение 1. Пусть задана k-форма $\omega = \sum f_{j_1,\dots,j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$ и отображение $F(\vec{y}) = (F_1(\vec{y}), \dots, F_n(\vec{y}))$, причём $y \in \mathbb{R}^m$, где m и n не обязательно равны. *Обратным образом* $\alpha = F^*\omega$ формы ω под действием F называется форма

$$\alpha = \sum f_{j_1,\dots,j_k} dF_{j_1} \wedge \dots \wedge \dots dF_{j_k}.$$

Задача 1. Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Как будет устроена форма $F^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$?
Ответ.

$$F^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \mathrm{Jac}(F)(\vec{y}) \cdot dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n,$$

где $\mathrm{Jac}(F)(\vec{y})$ — якобиан отображения F, то есть определитель матрицы из частных производных:

$$\mathrm{Jac}(F)(\vec{y}) = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Задача 2. Пусть $F : [a,b] \to [c,d]$ — диффеоморфизм, $\omega = \varphi(x)\, dx$ — произвольная 1-форма на $[c,d]$, и $\alpha = F^*(\varphi) = \psi(y)\, dy$ — обратный образ этой формы. Докажите, что

$$\int_a^b \psi(y)\, dy = \int_c^d \varphi(x) dx.$$

Иными словами,

$$\int_{[a,b]} \alpha = \int_{[c,d]} \omega.$$

Задача 3. Проверьте, что в предыдущей задаче достаточно потребовать лишь $F(a) = c$, $F(b) = d$, без предположения обратимости F.

Определение 2. *(Внешней, дифференциальной) k-формой на многообразии M* называется выбор способа задать для каждой локальной системы координат $x_1, \dots, x_n$ на M, сопоставляющей некоторой области U область $D \subset \mathbb{R}^n$, k-формы

$$\omega_x = \sum f_{j_1,\dots,j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k},$$

такого, что формы, соответствующие разным системам координат, согласованы. А именно, на x-образе пересечения $U \cap U'$ областей определения двух систем координат (*карт*), x и y, действует *отображение переклейки* (оно же «*замена координат*») $x = F(y)$. Мы требуем, чтобы для любых двух систем координат x и y с пересекающимися картами, было бы выполнено $\omega_y = F^*\omega_x$.

Задача 4. Пусть заданы гладкие отображения $F : D \to D'$ и $G : D' \to D''$ и k-форма ω на D''. Докажите, что

$$(G \circ F)^*\omega = F^*(G^*\omega).$$

Где определена эта форма?

Задача 5. Пусть $F : D \to D'$ — диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию,

$$\omega_x = f(\vec{x})\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad \omega_y = F^*\omega_x = g(\vec{y})\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Тогда

$$\iint_D f(\vec{x})\, dx_1 \dots dx_n = \iint_{D'} g(\vec{y})\, dy_1 \dots dy_n. \tag{1}$$

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 9 из второй серии задач и поймите, что (1) — это формула замены переменной под знаком интеграла.

Определение 3. Пусть на ориентируемом n-мерном многообразии M задана n-форма ω, носитель которой содержится в некоторой координатной окрестности с координатами $x_1, \ldots, x_n$. Запишем её в этих координатах: пусть в этой окрестности форма задаётся как $\omega = f_x(\vec{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Тогда её интеграл по этой окрестности (или, что то же самое, по всему M) определяется как

$$\int_M \omega := \iint f_x(\vec{x})\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Задача 6. Поймите корректность этого определения.

Задача 7. Пусть на многообразии M задана k-форма ω, и есть k-мерное ориентируемое подмногообразие $N \subset M$. Определите, чему должен равняться интеграл $\int_N \omega$, и проверьте корректность получившегося определения.

Формулой Стокса называется равенство

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

справедливое для всякого гладкого ориентируемого многообразия с краем M, $\dim M = k$, $k-1$-формы ω, и согласованного выбора ориентации края.

Задача 8. Используя формулу Стокса, выведите

a) формулу Ньютона-Лейбница;

b) формулу Грина: циркуляция векторного поля (F_1, F_2) по контуру в $\mathbb{R}^2$ равна интегралу функции

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2};$$

по области, ограниченной контуром;

c) «малую» формулу Стокса анализа: циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку его ротора через затягивающую контур поверхность;

d) формулу Гаусса-Остроградского (см. задачи к лекции 1).

Задача 9. Рассмотрим двумерную версию преобразований Лоренца, то есть преобразований $\mathbb{R}^2$, сохраняющих форму $c^2dt^2 - dx^2$. Найдите их явный вид.

Задача 10. В $\mathbb{R}^3$ находится бесконечно тонкий прямой равномерно заряженный с линейной плотностью ρ неподвижный провод.

a) Какие электрическое и магнитное поля он создает?

b) Перейдём в систему отсчета, равномерно движущуюся параллельно проводу со скоростью v. Какие в этой системе имеются заряды и поля?

   Указание. А плотность могла и поменяться...

c) Примените эту замену координат к 2-тензору электромагнитного поля и сравните результаты с пунктом b.

Задача 11. Показать, что любое расслоение с односвязной базой тривиализуемо (для тех, кто знает, что такое односвязный).

Задача 12. Тривиальны ли следующие расслоения:

a) Лист Мёбиуса как расслоение над окружностью (пример из лекции 3);

b) Расслоение Хопфа — расслоение сферы S^3 с базой S^2 со слоем S^1.

   Указание. Найдите индексы зацепления в S^3 любых двух слоёв.