Задачи к курсу В. Клепцына и Д. Волка.
Лекция 4

Расслоения

Определение 1. *Расслоением* с базой B, слоем F и тотальным пространством E называется отображение $p : E \to B$, удовлетворяющее следующему условию (“локальной тривиальности”). Для любой точки $x \in B$ найдутся её окрестность $U \ni x$ и гомеоморфизм $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ (называемый *локальной тривиализацией*), такие, что $p \circ \varphi^{-1} : U \times F \to U$ это проекция на первый сомножитель. Иными словами, локально выбором координат в тотальном пространстве отображение приводится к виду проецирования в прямом произведении.

Определение 2. Расслоение $\pi_B : B \times F \to B, \quad (b, x) \mapsto b$, называется *тривиальным расслоением.*

Определение 3. Пусть над пересекающимися окрестностями U_i и U_j расслоение тривиализуется гомеоморфизмами φ_i и φ_j. Композиция $g_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j : (U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F$ называется *отображением переклейки.*

Задача 1. Поймите, что отображение переклейки можно рассматривать (и мы так будем делать) как отображение $g_{ij} : U_i \cap U_j \to Homeo(F)$. Какому соотношению они обязаны удовлетворять?
Ответ. $g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) = g_{ik}(x) \quad \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

Задача 2. Расслоение тривиально тогда и только тогда, когда найдутся отображения $h_i : U_i \to Homeo(F)$, такие, что $g_{ij}(x) = h_i(x) \circ h_j^{-1}(x) \quad x \in U_i \cap U_j$.

Определение 4. Если задана какая-либо выделенная группа G, действующая на F, и все отображения g_{ij} являются отображениями в G, то G называется *структурной группой* расслоения.

Задача 3. Пусть $F = \mathbb{R}^n$, $G = GL_n(\mathbb{R})$. Поймите, что тогда слои естественным образом снабжены структурой векторного пространства: сложение точек из одного слоя в тривиализованных координатах приводит к корректно определённой точке этого слоя.

Задача 4. Пусть слой F совпадает с группой G, действующей на себе умножениями справа. Поймите, что тогда на расслоении с такой структурной группой на любом слое действует группа G умножениями слева (поскольку результат такого умножения не зависит от выбранной системы координат). При этом действие на каждом слое свободное (нет неподвижных точек) и транзитивное (весь слой является одной орбитой) — тем самым, слои оказываются групповыми аналогами аффинных пространств.

Определение 5. Описанные в предыдущей задаче расслоения называются *главными G-расслоениями.*

Определение 6. *Сечением* расслоения называется отображение $s : B \to E$, такое, что $p \circ s = id$.

Задача 5. Рассмотрим главное $\mathbb{R}^1$-расслоение над базой $B = \mathbb{R}^k$.

a) Как устроены его функции переклейки g_{ij}?

   Ответ. $g_{ij}(x) : y_j \mapsto y_i = y_j + \varphi_{ij}(x)$.

b) Пусть задано сечение s, в тривиализации φ_i над окрестностью U_i задающееся как график функции $y_i = f_i(x)$. Рассмотрим величину

$$\nabla_v s := \frac{\partial f_i}{\partial v},$$

   для вектора $v \in T_q B$. Как она выражается в терминах функции f_j?

   Ответ. $\nabla_v s = \frac{\partial f_j}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial v} = \frac{\partial f_j}{\partial v} + (d\varphi_{ij})(v)$

Определение 7. *Связностью* в главном $\mathbb{R}^1$-расслоении называется сопоставление каждой тривиализации $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}$ 1-формы α_i, позволяющий корректно дифференцировать сечения $s : B \to E$ по правилу

$$\nabla_v(s) := \frac{\partial f_i}{\partial v} + \alpha_i(v). \tag{1}$$

Задача 6. Как выглядит условие корректности — как должны быть связаны между собой формы α_i, соответствующие разным тривиализациям, чтобы результат дифференцирования (1) не зависел от выбора конкретной тривиализации?

Ответ. $\alpha_i = \alpha_j + d\varphi_{ij}$.

Определение 8. Сечение s называется *ковариантно постоянным*, если

$$\forall v \quad \nabla_v s = 0.$$

Задача 7. *Если* связность ∇ в некоторых координатах имеет вид

$$\nabla_v s = \frac{\partial f}{\partial v}, \tag{2}$$

где сечение s является графиком функции f, то сечение ковариантно постоянно тогда и только тогда, когда в этих координатах задающая его функция постоянна.

Задача 8. У связности ∇ в главном $\mathbb{R}^1$-расслоении есть (локально) ковариантно постоянное сечение тогда и только тогда, когда выбором координат она (локально) приводится к виду (2).

Определение 9. Путь γ называется *ковариантно постоянным*, если в любой тривиализации для его записи $\gamma(t) = (\xi_i(t), \eta_i(t))$ имеет место

$$\dot{\eta}_i + \alpha_i(\dot{\xi}_i) = 0$$

Задача 9. Для любого пути $\xi : [t_0, t_1] \to B$ и любой точки $u \in F_{\xi(t_0)} := p^{-1}(\xi(t_0))$ существует единственный ковариантно постоянный путь γ, проецирующийся в ξ и начинающийся с точки u.

Определение 10. Отображение из $F_{\xi(t_0)}$ в $F_{\xi(t_1)}$, сопоставляющее началу пути из предыдущей задачи его конец, называется *параллельным переносом* вдоль пути ξ.

Задача 10. a) Пусть в главном $\mathbb{R}^1$-расслоении задана некоторая связность ∇, в локальной тривиализации задающаяся формой α. Как в этих координатах задаётся отображение параллельного переноса?

Ответ. $y \mapsto y - \int_\xi \alpha$.

b) Всякая связность в главном $\mathbb{R}^1$-расслоении над $\mathbb{R}$ приводится к виду (2).

c) Пусть в главном $\mathbb{R}^1$-расслоении задана некоторая связность ∇, в локальной тривиализации задающаяся формой α, а *замкнутый* путь γ является границей области D. Как устроено отображение переноса вдоль γ?

Ответ. $y \mapsto y - \int_\xi \alpha = y - \int_D d\alpha$.

Определение 11. Форма $K = d\alpha$ называется *формой кривизны* связности ∇.

Задача 11. a) Проверьте, что предыдущее определение корректно — что оно не зависит от выбора тривиализации. Задача 10c говорит о геометрическом смысле формы кривизны: сдвиг, получаемый при обносе вдоль γ, не зависит от выбора тривиализации.

b) Связность локально приводится к виду (2) тогда и только тогда, когда форма кривизны равна нулю.

Определение 12. Связность, локально приводящаяся к виду (2), называется *плоской*.

Определение 13. Форма F называется *замкнутой*, если $dF = 0$, и *точной*, если $F = d\alpha$.

Задача 12. Форма кривизны замкнута.