



От случайных динамических систем к гладким

Кудряшов Ю. Г.

Листок 1

ЛШСМ 2009

Задача 1 (Максимальные аттракторы). Найдите максимальные аттракторы следующих динамических систем.

- а) X — круг $x^2 + y^2 < 1$, $f: (x, y) \mapsto (0.5x, 0.7y)$;
- б) X — круг $x^2 + y^2 < 1$, $f: (x, y) \mapsto (0.7y, -0.7x)$;
- в) X — кольцо, задаваемое в полярных координатах неравенствами $0.5 < \rho < 1.5$, $f: (\rho, \varphi) \mapsto (\frac{\rho+1}{2}, \varphi + 0.5 \sin \varphi)$;

К какому наименьшему множеству притягиваются почти все орбиты?

Задача 2 (Удвоение окружности). Рассмотрим удвоение $\varphi \mapsto 2\varphi$ окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

а) Докажите, что орбита точки φ периодична тогда и только тогда, когда периодична двоичная запись числа φ .

б) Переформулируйте утверждение «орбита точки φ всюду плотна» в терминах двоичной записи числа φ .

в) Докажите, что орбиты почти всех точек окружности всюду плотны.

г) Постройте замкнутое инвариантное множество, не содержащее ни одной периодической орбиты.

Задача 3 (Соленоид). Рассмотрим полноторие¹ — прямое произведение окружности $S^1 = \{ |z| = 1 \}$ на диск $D^2 = \{ |w| < 2 \}$. Пусть

$$F: S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2, \quad F: (z, w) \mapsto (z^2, z + 0.2w). \quad (1)$$

а) Докажите, что отображение F инъективно.

б) Докажите, что максимальный аттрактор отображения F пересекается с каждым диском $z = \text{const}$ по континуальному множеству.

¹То, что находится внутри стандартного тора $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$