Кудряшов Ю. Г.

От случайных динамических систем к гладким

Листок 2 ЛШСМ 2009

1 Сдвиг Бернулли

Рассмотрим пространство двусторонних последовательностей нулей и единиц:

$$\Sigma^2 = \{\, 0, 1 \,\}^{\mathbb{Z}} = \{\, \omega \mid \omega = \dots \omega_{-n} \dots \omega_0 \dots \omega_n \dots, \omega_k \in \{\, 0, 1 \,\} \,\}. \quad (1)$$

Об этих последовательностях можно думать как о результатах бесконечно долгого (как в прошлом, так и в будущем) бросания правильной монеты. Мера множества $A \subset \Sigma^2$ — это вероятность[1] того, что при бросаниях монетки получится последовательность из множества A. В частности, легко посчитать меры цилиндров C_k — множеств вида «последовательности, у которых данные k позиций фиксированы». Более формально, каждый цилиндр C_k получается следующим образом: берём $j_1 < \dots < j_k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_l \in \{\, 0, 1 \,\}$ и полагаем $C_k = \{\, \omega \mid \omega_{j_l} = \alpha_l \,\}$. Мера такого цилиндра равна вероятности выпадения фиксированной последовательности исходов при k бросаниях монеты: $\mu C_k = 2^{-k}$.

Определение 1. *Сдвиг Бернулли* — это сдвиг влево, то есть отображение $\sigma\colon \Sigma^2 \to \Sigma^2$ пространства последовательностей, переводящее каждую последовательность ω в последовательность ω', такую что $\omega'_n = \omega_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 1 (Для тех, кто знаком с понятием меры)**.** (a) Определите формально меру μ.

(b) Докажите, что сдвиг Бернулли сохраняет меру μ, то есть если определена мера подмножества $A \subset \Sigma^2$, то определена и мера его прообраза, причём $\mu(A) = \mu(\sigma^{-1}A)$.

2 Косые произведения

Напомним, что *прямое произведение* отображений $f\colon Y \to Y$ и $h\colon X \to X$ — это отображение

$$(f \times h)\colon Y \times X \to Y \times X, \quad (f \times h)\colon (y, x) \mapsto (f(y), h(x)).$$

[1] Мера определена не для всех подмножеств $A \subset \Sigma^2$, но мы не будем сейчас на этом останавливаться.

Это отображение сохраняет как разбиение на «вертикальные» слои вида $\{ y \} \times X$, так и на «горизонтальные» слои вида $Y \times \{ x \}$.

Бывает полезно требовать сохранения только разбиения на «вертикальные» слои.

Определение 2. *Косым произведением* называется отображение F прямого произведения $Y \times X$ в себя вида

$$F\colon (y, x) \mapsto (f(y), h_y(x)). \tag{2}$$

При этом пространство Y называется *базой*, а пространство X — *слоем.*

Это определение выглядит более естественно, если смотреть на $Y \times X$ как на расслоение с базой Y и слоем X. Тогда косые произведения, и только они, сохраняют структуру расслоения.

Упражнение 2. Пусть

$$Y = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad X = \mathbb{R},$$
$$f(y) = y + 0.5, \quad h_y(x) = (1 + 0.5\cos(2\pi y))x.$$

Как устроены орбиты точек в соответствующем косом произведении?

3 Случайные ДС

На случайную динамическую систему можно смотреть с двух точек зрения. При первом подходе это случайный процесс, где на каждом шаге происходит бросание монетки и в соответствии с ним — выбор, которое отображение применять в этот раз. Однако для наших целей удобнее записать всю серию бросаний (как уже произошедших, так и предстоящих) в одну последовательность $\omega \in \Sigma^2$, и получить косое произведение над сдвигом Бернулли.

Определение 3. Пусть f_0, f_1 — два отображения (метрического, топологического, ...) пространства M в себя. *Случайной динамической системой* называется отображение $F\colon \Sigma^2 \times M \to \Sigma^2 \times M$ вида

$$F\colon (\omega, x) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}(x)).$$

В результате мы получаем настоящую динамическую систему, правда, с достаточно экзотическим фазовым пространством.

Упражнение 3. В каком смысле данное определение случайной ДС соответствует нашему первоначальному интуитивному определению? Переведите на язык косых произведений над сдвигом Бернулли эффекты, которые мы наблюдали на лекции для случайных ДС.