Кудряшов Ю. Г.
От случайных динамических систем к гладким
Листок 3 лшсм 2009

# 1 Щетинистый аттрактор

Рассмотрим следующее косое произведение над удвоением окружности:

$$X = S^1 \times \mathbb{R}, \quad F\colon X \to X, \quad F\colon (\varphi, x) \mapsto (2\varphi, (1 + 0.5\cos\varphi)x).$$

**Задача 1.** Докажите, что для а) счётного; б) континуального числа начальных углов $\varphi$ $x$-координата точки орбиты стремится к бесконечности.

**Задача 2.** Докажите, что для почти всех начальных значений угла $\varphi$ орбита точки стремится к окружности $x = 0$.

Для решения этой задачи полезно применить следующую теорему:

**Задача 3** (Нейман, Биркгоф, Хинчин)**.** Пусть $f\colon M \to M$ — эргодическое преобразование многообразия $M$, сохраняющее меру Лебега; $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на $M$. Тогда для почти всех точек $x \in M$ *временно́е среднее*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$$

существует и равно *пространственному среднему*

$$\overline{\varphi}(x) = \frac{1}{\mu(M)} \int_M \varphi \, d\mu.$$

# 2 Кошмар Фубини: пример А. Катка

Для каждого числа $0 < p < 1$ определим «$p$-взвешенную» двоичную запись любого числа $x \in [0; 1]$. Для этого будем действовать как и при определении двоичной записи, только на каждом шаге разбивать отрезок в отношении $1 - p : p$. Пусть $0.\omega(p, x) = 0.\omega_0(p, x) \dots \omega_k(p, x) \dots$ — «$p$-взвешенная» двоичная запись числа $x$. Далее, пусть $F_\omega(p)$ — число, имеющее «$p$-взвешенную» запись $0.\omega$.

**Задача 4.** а) Представьте $F_\omega(p)$ в виде сходящегося ряда.
б) Докажите, что функция $F_\omega$ бесконечно гладкая.

в) Докажите, что функция $F_\omega$ аналитическая.

г) Докажите, что графики функций $F_\omega\colon (0;1) \to [0;1]$ при различных $\omega$ не пересекаются между собой, и через каждую точку квадрата $0 < p < 1$, $0 \le x \le 1$ проходит ровно одна такая кривая.

д) Найдите и исправьте ошибку в предыдущем пункте.

Итак, мы получили разбиение квадрата $(0;1)\times[0;1]$ на аналитические кривые, соответствующие последовательностям $\omega$. Будем называть эти кривые *слоями*.

**Задача 5.** Фиксируем теперь какие-нибудь $p_1$ и $p_2$ и рассмотрим отображение *голономии*, переводящее каждую точку $(p_1, x)$ отрезка $p = p_1$ в точку $(p_2, \widetilde{x}) = (p_2, F_{\omega(p_1,x)}(p_2))$ отрезка $p = p_2$, лежащую на том же слое. Докажите, что отображение $x \mapsto \widetilde{x}$ гёльдерово.

Читатели, не знакомые с определением меры Лебега, могут из следующей задачи решать только первый пункт.

**Задача 6.** Рассмотрим множество $M = \{\, (p,x) \mid \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \omega_k(p,x) = p \,\}$.

а) Докажите, что множество $M$ пересекает график каждой из функций $F_\omega$ не более, чем по одной точке.

б) Докажите, что множество $M$ измеримо.

в) Докажите, что множество $M$ пересекает каждый отрезок $p = \mathrm{const}$ по множеству меры 1. Следовательно, мера множества $M$ равна мере всего квадрата.

Итак, можно выбрать по *одной* точке с каждого из графиков, и получить множество *полной меры*.