ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К КУРСУ Г.Ю. ПАНИНОЙ "ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ"

Перед прослушиванием курса чрезвычайно полезно порешать следующие задачи. Во-первых, Вы повторите необходимый материал, а во-вторых, сумеете оценить Вашу подготовленность: если Вы справляетесь с половиной задач, то этот курс – для Вас.

Ниже все *кольца* предполагаются коммутативными и с единицей.

$\mathbb{C}[z_1, z_2]$ – кольцо многочленов от двух переменных над полем комплексных чисел. Оно же является алгеброй над полем комплексных чисел.

Идеалом кольца называется такое его подмножество $\mathfrak{a}$, что

$\mathfrak{a}$ – группа по сложению,

$a \in \mathfrak{a}, b \in R \Rightarrow a \cdot b \in \mathfrak{a}$.

Идеал называется *главным*, если он может быть представлен как $\mathfrak{a} = aR$ для некоторого $a \in R$.

Идеал называется *максимальным*, если он максимален по включению (= не содержится в большем идеале, отличном от самого кольца).

Идеал называется *простым*, если

$a \cdot b \in \mathfrak{a} \Rightarrow a \in \mathfrak{a}$ или $b \in \mathfrak{a}$.

Задачи

(1) Покажите, что в кольце целых чисел все идеалы главные.

(2) Пусть в кольце R нет других идеалов кроме самого R и $\{0\}$. Докажите, что тогда R – поле.

(3) Покажите, что идеал содержит обратимый элемент кольца тогда и только тогда, когда он совпадает со всем кольцом.

(4) Приведите пример идеала в кольце $\mathbb{C}[z_1, z_2]$, не являющегося главным.

(5) Покажите, что множества

$\{f \in \mathbb{C}[z_1, z_2] \mid f(0,0) = 0\}$

и $\{f \in \mathbb{C}[z_1, z_2] \mid f(5,13) = 0\}$

являются идеалами в кольце $\mathbb{C}[z_1, z_2]$.

Будет ли идеалом их пересечение?

(6) Пусть X – подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$. Покажите, что множество $i_X = \{f \in \mathbb{C}[z_1, z_2] \mid f \equiv 0$ на множестве $X\}$ является идеалом в кольце $\mathbb{C}[z_1, z_2]$.

(7) (В обозначениях предыдущей задачи.) Пусть $X \subseteq Y$. Как соотносятся i_X и i_Y?

(8) Покажите, что множество всех полиномов $f \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$, которые представимы в виде

$f = \sum_{(k,m)} \lambda_{k,m}\ z_1^k z_2^m$, где верно $k \geq m$,

является подкольцом кольца $\mathbb{C}[z_1, z_2]$.

(9) * Найдите подалгебру алгебры $\mathbb{C}[z_1, z_2]$, не являющуюся конечнопорожденной.

(10) *Тором* T называется множество упорядоченных пар ненулевых комплексных чисел: $T = \{(t_1, t_2)|\ t_1 \neq 0, t_2 \neq 0\}$. Покажите, что тор является коммутативной группой, если групповую операцию задать как
$(t_1, t_2) \cdot (t'_1, t'_2) = (t_1 t'_1, t_2 t'_2)$.

(11) Тор T действует на комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ следующим образом: $(t_1, t_2) \cdot (z_1, z_2) = (t_1 z_1, t_2 z_2)$ Перечислите все орбиты этого действия.

(12) Тор T действует на комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ следующим образом: $(t_1, t_2) \cdot (z_1, z_2) = (z_1/t_1, t_2 z_2)$ Перечислите все орбиты этого действия.

(13) * Тор T действует на проективной комплексной плоскости $\mathbb{CP}^2$ следующим образом: $(t_1, t_2) \cdot (z_1 : z_2 : z_3) = (t_1 z_1 : t_2 z_2 : z_3)$ Перечислите все орбиты этого действия.

(14) * Пусть R – кольцо, $\mathfrak{a} \subset R$– идеал. Покажите, что $\mathfrak{a}$ – максимальный идеал тогда и только тогда, когда фактор $R/\mathfrak{a}$ является полем.

(15) * Покажите, что $\mathfrak{a} \subset R$ – простой идеал тогда и только тогда, когда фактор $R/\mathfrak{a}$ является областью целостности (то есть не имеет таких элементов, что $x \neq 0, y \neq 0, xy = 0$).