Задачи к курсу В.Протасова “ Теоремы о замыкании ”

1. Выведите теорему Понселе для $n = 3$ из формулы Эйлера. Та же задача для $n = 4$.

2. Как применить доказательство Якоби для двух окружностей общего положения ? Например, для двух окружностей, у которых круги не пересекаются ?

3. К теореме Понселе для $n = 4$. Докажите, что у любого вписанно-описанного четырёхугольника центры двух окружностей (вписанной и описанной) и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой.

4. Согласно *теореме Уэйлса*, для всех вписанно-описанных n-угольников, соответствующих двум данным окружностям, центр тяжести n точек касания их сторон со вписанной окружностью один и тот же. Докажите эту теорему для $n = 3, 4$.

5. Докажите теорему о зигзаге для двух окружностей на плоскости при $n = 2$. Найдите соотношение между радиусами окружностей, расстоянием между их центрами и длиной прыжка, гарантирующее замыкание.

6. Докажите теорему о зигзаге для двух прямых на плоскости при любом n. Найдите необходимое и достаточное условие для замыкания. Та же задача для пары скрещивающихся прямых в $\mathbb{R}^3$.

7. Докажите *теорему Понзаг*: если для окружностей α и β существует n-угольник с вершинами на α и серединами сторон на β, то таких n-угольников бесконечно много, причём любая точка окружности α может служить вершиной такого n-угольника.

8. Дана окружность и n точек внутри неё. Сколько может существовать n-угольников (возможно, невыпуклых и даже самопересекающихся), вписанных в эту окружность, у которых стороны проходят через данные точки ? Как построить хотя-бы один такой n-угольник ? Предполагается, что точки занумерованы, и стороны n-угольника последовательно проходят через данные точки.

9 (действительная параметризация пучка). Докажите, что для любого $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ множество точек плоскости, отношение степеней которых относительно двух окружностей α и β равно t, является окружностью (при $t = 1$ – прямой) пучка, проходящего через α и β.

10 (основная лемма для доказательства теоремы Эмха). Две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 соответственно, пересекаются в точках A и B. Пусть P - четвертая вершина параллелограмма O_2AO_1P. Тогда для любой окружности с центром в точке P, пересекающей обе окружности (первую - в точках M_1, N_1, вторую - в точках M_2, N_2) имеем

а) прямые M_1M_2 и N_1N_2 пересекаются в точке A;

б) $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{BM_1}{BM_2} = \frac{BN_1}{BN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

11. Докажите теорему о зигзаге в плоскости Лобачевского.