09.4.27/ 09.7.18

Лекция 1

1.0. Действие групп на множестве.

1.1. Подмножества конечного множества.

$$\mathbf{sub}_k(n) := \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Групповой смысл этой формулы.

1.2. Конечные поля $\mathbb{F}_q$ и математика над ними. Аффинные и проективные пространства над $\mathbb{F}_q$. Группы проективных преобразований. Действие $\#\mathsf{SL}_n(\mathbb{F}_q) : [\mathbf{A}^n(\mathbb{F}_q)] \setminus \{\mathbf{0}\}$. Формулы

$$\#\mathsf{SL}_1(\mathbb{F}_q) = 1,$$

$$n > 1 \Longrightarrow \#\mathsf{SL}_n(\mathbb{F}_q) = q^n(q^n - 1)\#\mathsf{SL}_{n-1}(\mathbb{F}_q),$$

$$\#\mathsf{SL}_n(\mathbb{F}_q) = q^{\frac{(n-1)n}{2}} \prod_{i=2}^{n}(q^i - 1).$$

1.3. Грассманианы над конечными полями. Формулы

$$\#\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_q) = \frac{\#\mathsf{SL}_n(\mathbb{F}_q)}{q^{k(n-k)}(q-1)\#\mathsf{SL}_k(\mathbb{F}_q)\#\mathsf{SL}_{n-k}(\mathbb{F}_q)} = \frac{\prod_{a=1}^{n}(q^a - 1)}{\prod_{b=1}^{k}(q^b - 1)\prod_{c=1}^{n-k}(q^c - 1)}.$$

Случай $k = 1$: верный ответ для $\mathbf{Gr}_{n;1} = \mathbf{P}^{n-1}$.

Важное упражнение. *Вычислите предел этого выражения при $q \to 1$.*

1.4. "k-мерные подпространства n-мерного пространства над $\mathbb{F}_1$" и k-элементные подмножества n-элементного множества. Переписываем формулу п. 1.3 так, чтобы она сохраняла смысл при $q = 1$:

$$\#\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_q) = \frac{\prod_{a=1}^{n} \frac{q^a-1}{q-1}}{\prod_{b=1}^{k} \frac{q^b-1}{q-1} \prod_{c=1}^{n-k} \frac{q^c-1}{q-1}}.$$

Вводя
$$\frac{q^i-1}{q-1}=1+q+\dots q^{i-1}=:[i]_q,$$
замечая
$$[i]_q\equiv i$$
и вводя ещё
$$m[!]_q:=[1]_q[2]_q\dots[m]_q,$$
перепишем формулу для порядков грассманианов в виде
$$\#\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_q)=\frac{n[!]_q}{k[!]_q(n-k)[!]_q}.$$
Формальная подстановка $q=1$ даёт
$$\#\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_1)=\frac{n[!]_1}{k[!]_1(n-k)[!]_1}=\frac{n!}{k!(n-k)!},$$
или
$$\#\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_1)=\binom{n}{k}.$$