09.4.27/ 09.7.20

Лекция 2

2.0. О классификации конечных групп. Современное состояние теории. Разделение на задачу составления группы из двух меньших и перечисление *простых* групп.

2.1. О построении расширений с заданными ядром и фактором (по Брауну). Пусть N и G - уже известные конечные группы, а мы хотим описать все группы E, обладающие нормальным делителем N, таким, что $E/N \simeq G$; каждая такая группа E называется *расширением G с помощью N* (читается справа налево!).

Иначе говоря, изучаются точные последовательности вида

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1 \qquad (\star),$$

в которых группы N и G предполагаются известными, а группа E ищется.

Опытный человек по каждому такому расширению построит "внешнее действие" G на N, т.е.

$$\psi_E : G \longrightarrow \mathrm{Out}N.$$

Главным действующим лицом оказывается *коммутативная* группа center(N), на которой с помощью $\psi_\star$ уже по-настоящему действует группа G. Расширения полностью описываются с помощью когомологий.

• *Множество расширений $(\star)$ с заданным $\psi = \psi_E$ либо пусто, либо находится во взаимно однозначном соответствии с элементами группы* $\mathrm{H}^2(G; \mathrm{center}(N), \psi)$.

• *Это множество расширений непусто или пусто в зависимости от того, обращается ли в ноль некоторое препятствие, лежащее в группе* $\mathrm{H}^3(G; \mathrm{center}(N), \psi)$.

2.2. О простых группах. Известны 18 серий и 26 спорадических группы. Все названы!

Имеются серьёзнейшие основания считать, что других простых групп не существует.

Среди серий: Z_p при простых p и A_n при $n \geq 5$. Остальные 16 – *группы Шевалле*, так или иначе связанные с линейной алгеброй над конечными полями.

2.3. Чем помогает $\mathbb{F}_1$? Ограничимся для начала цитатой (Soulé, 2003): *…le groupe des points de SL_n dans $\mathbb{F}_1$ est le groupe symetrique des permutations de n lettres et… ces lettres sont les points dans $\mathbb{F}_1$ de l'espace projectif $\mathbb{P}^n$.*