09.4.27/ 09.7.23

Лекция 3

3.0. О фундаментальных обобщениях. Аналоги: проективизация плоскости и пространства, обобщённые функции. Наша цель: обобщённые кольца, обобщённые схемы над ними и обобщённые пучки на обобщённых схемах.

Во всех случаях классические объекты *вкладываются* в обобщённые.

3.1. Абстрактная чепуха.

3.1.0. Категории. Исходный пример: категория множеств $\mathcal{SETS}$. Обозначения, подобные теоретико множественным с дублирующимися знаками: для $X, Y \in\in \mathcal{C}$ множества $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ с "ассоциативными" композициями

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) :\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z) : (f, g) \mapsto g \circ f$$

и единицами в *моноидах*

$$1_X \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X).$$

Три манинских типа.

• Множества со структурами; морфизмы – *отображения*, уважающие структуры. Основные примеры: $\mathcal{GROUPS}$, $\mathcal{RINGS}$, $\mathcal{TOP}$, ${}_G\mathcal{MOD}$.

Подкатегории: $\mathcal{ABGROUPS}$, $\mathcal{FIELDS}$,...

Вариации: $\mathcal{TOP}^\bullet$, $\mathcal{TOPGROUPS}$,...

• Множества со структурами; морфизмы – *классы отображений*, уважающих структуры. Пример: $\mathcal{HOT}$.

• Специальные *малые* категории. Пример: $\star_G$.

3.1.1. Функторы. Определение функтора $\mathcal{C} \longrightarrow\!\!\longrightarrow \mathcal{D}$. Примеры:

$$\mathbf{1}_{\mathcal{C}} :: \mathcal{C} \longrightarrow\!\!\longrightarrow \mathcal{C},$$

$$\mathbf{forget} :: \mathcal{RINGS} \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{SETS} \text{ и т.п.},$$

$$\pi_1 :: \mathcal{TOP}^\bullet \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{GROUPS},$$

$$\mathrm{H}_q :: \mathcal{HOT} \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{ABGROUPS};$$

система полиномиальных уравнений с целыми коэффициентами $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_k) = 0$, где $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{Z}(x_1 \ldots, x_n)$ определяет

$$\mathbf{solve}_{\vec{f}} :: \mathcal{RINGS} \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{SETS} :: A \mapsto\mapsto \mathbf{solve}_{\vec{f}}(A);$$

простейшие *групповые схемы* имеют, например, вид

$$\mathsf{SL}_3 : \mathcal{RINGS} \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{GROUPS} :: A \mapsto\mapsto \mathsf{SL}_3(A).$$

3.1.2. Композиция функторов. Определение очевидно. Но не надо думать, что очевидно понятие *обратного* функтора! Что-то вроде примера: π_1 и **EiMac** :: $\Gamma \mapsto\mapsto \mathrm{K}(\Gamma, 1)$

3.1.3. (Естественное) преобразование функторов. Определение со многими стрелками. Примеры: будет много.

3.1.3a. Пары сопряжённых функторов. Определение со многими стрелками. Пример:

$$\mathbf{free} :: \mathcal{SETS} \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{GROUPS},$$

$$\mathbf{forget} :: \mathcal{GROUPS} \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{SETS}.$$

3.2. Эндофункторы. Можно компонировать! Получаем "моноиды" $\mathcal{ENDOFUN}(\mathcal{C})$ с "единицами" $\mathbf{1}_\mathcal{C}$.

3.3. Монады. Над категорией $\mathcal{C}$ тройки (Σ, μ, ϵ), где

$$\Sigma :: \mathcal{C} \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{C},$$

$$\mu : \Sigma^2 \Longrightarrow \Sigma,$$

$$\epsilon : \mathbf{1}_\mathcal{C} \Longrightarrow \Sigma.$$

Требуется "ассоциативность": $\forall\forall C \in\in \mathcal{C}$;

$$\mu_C \circ \Sigma(\mu_C) = \mu_C \circ \mu_\Sigma(C) : \Sigma^3(C) \Longrightarrow \Sigma(C)$$

и "нейтральность"

$$\mu_C \circ \epsilon_{\Sigma(C)} = \mu_C \circ \Sigma(\epsilon_C) = 1_{\Sigma(C)} : \Sigma(C) \Longrightarrow \Sigma(C).$$

Просто пример: *монада слов* над $\mathcal{SETS}$.
ГЛАВНЫЙ ПРИМЕР. Кольцо как монада над $\mathcal{SETS}$.

3.4. Обобщённые кольца. Дальше тоже $\mathcal{C} = \mathcal{SETS}$.

От монады требуется *алгебраичность*

$$\Sigma(X) = \cup_{\text{ конечные } Y \subseteq X} \Sigma(Y)$$

и *коммутативность*, являющуюся монадным аналогом следующего факта: $\mathrm{Mor}_R(M, N)$ является *R-подмодулем* в $\mathrm{Mor}_{\mathcal{SETS}}(M, N)$ тогда и только тогда, когда кольцо R коммутативно.

3.5. Поле $\mathbb{F}_1$ как обобщённое кольцо. См. Durov, p.145. Здесь

$$\Sigma : \mathcal{SETS} \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{SETS} :: X \mapsto\mapsto \{\star\} \coprod X.$$

Преобразования μ ϵ очевидны.

3.6. Место $\mathbb{F}_1$ среди других обобщённых колец. Наиболее интересно обобщённое кольцо $\mathbb{Z}_\infty$, определённое эндофунктором

$$S \mapsto\mapsto \{\sum_{s \in S} \lambda_s s | \text{ почти все} \lambda_s = 0, \sum_{s \in S} \lambda_s \leq 1\}$$

в категории множеств.