09.4.27/ 09.7.25

Лекция 4

4.-1. Дополнения к предыдущей лекции. Подчеркнуть для монад (Σ, μ, ϵ) алгебраичность=конечность:

$$\Sigma(X) = \cup_{\text{ конечные } Y \subseteq X} \Sigma(Y).$$

В том же духе конечности "проблема": изучить класс функторов

$$\mathbf{s} = \mathbf{solve}_{\vec{f}} :: \mathcal{RINGS} \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{SETS},$$

удовлетворяющих $\mathbf{s}(\mathcal{RINGS}_{\text{finite}}) \subset \mathcal{SETS}_{\text{finite}}$ и другим очевидным свойствам (поведение относительно произведений, автоморфизмов,...). Попытаться распространить это изучение на $\mathcal{GENRINGS}$.

4.0. Место $\mathbb{F}_1$ и его родственников среди других обобщённых колец. Наиболее интересно обобщённое кольцо $\mathbb{Z}_\infty$, определённое эндофунктором

$$\mathbb{Z}_\infty :: S \mapsto\mapsto \{\sum_{s \in S} \lambda_s s | \lambda_s \in \mathbb{R}, \text{ почти все } \lambda_s = 0, \sum_{s \in S} |\lambda_s| \leq 1\}$$

(*октаэдральные* линейные комбинации!) в категории множеств. Очевидно включение

$$\mathbb{Z}_\infty \subset \underline{\mathbb{R}} :: S \mapsto\mapsto \{\sum_{s \in S} \lambda_s s | \lambda_s \in \mathbb{R}, \text{ почти все } \lambda_s = 0\}.,$$

По Дурову, $\mathbb{Z}_\infty$ – архимедов аналог колец $\mathbb{Z}_p$, т.е. как бы "кольцо", поле частных которого – $\mathbb{R}$. Замечательно то, что категория $\mathbb{Z}_\infty$-модулей по общим правилам является категорией *вещественных банаховых пространств.*

Далее, вводится архимедов аналог колец "p-ичных дробей" $\mathbb{Z}_{(p)} := \cup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{Z}}{p^n}$:

$$\mathbb{Z}_{(\infty)} := \mathbb{Z}_\infty \cap \underline{\mathbb{Q}}$$

и

$$\mathbb{F}_{\pm 1} := \mathbb{Z}_\infty \cap \underline{\mathbb{Z}}.$$

Очевидно включение

$$\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_{\pm 1}.$$

4.1. Что сделал Дуров? Очередное переобоснование алгебраической геометрии. Поначалу изучались множества решений систем полиномиальных уравнений, иногда склеенных в соответствии с идеей проективизации и их обобщениями.

Краткий обзор предшествующих идей.

• Древние греки,...Ньютон – 19 век. Проективизация + "расширение скаляров" от $\mathbb{R}_{\geq 0}$ до $\mathbb{C}$.

• Итальянские геометры 19 века – Зариский, ван дер Варден, Вейль. Многообразия над произвольными полями. Мечта о "правильной" теории когомологий.

ЧИСЛА ПОХОЖИ НА ФУНКЦИИ!

• От Вейля до ..., Гротендика. Любое кольцо (даже $\mathbb{Z}$)– что-то вроде кольца функций на чём-то вроде алгебраического многообразия – *схеме*. Любой модуль над "кольцом функций" на схеме – что-то вроде модуля сечений чего-то вроде *векторных расслоений* над схемой.

• ..., Аракелов. Многообразие над $\overline{\mathbb{Q}}$ – это семейство многообразий над Spec$\mathbb{Z}$. Оно *компактифицируется* комплексным многообразием "на бесконечности" с дополнительной структурой (эрмитовой метрикой,...), согласованной с конечной частью.

• От Аракелова до Дурова. Всё упрощается и становится естественным, если всюду последовательно заменять кольца на обобщённые кольца.

4.2. Зачем всё это было? Частичный ответ: для полноценной *теории пересечений*, чтобы не терять решения. Тут и проективизация, и расширение скаляров, и теории когомологий (где принимают значения степени?), и связь арифметики с топологией (когомологии Вейля).

Теория Дурова даёт конструкцию, имеющую черты *временно-окончательной.*

4.3. И при чём же тут $\mathbb{F}_1$? Как уже говорилось, это – побочный продукт теории (наряду с многими другими – тропической математикой,...).

Расширение скаляров от $\mathbb{F}_1$ до $\mathbb{Z}$ бессмысленно в теории обычных колец, но возможно в теории обобщённых. И оказывается, что многие многообразия подняты с $\mathbb{F}_1$!

Один из важных классов примеров (Soulé, 2003). Все торические многообразия подняты с $\mathbb{F}_1$, и присущая им $\mathbb{F}_1$-структура помогает понять их дзета-функции и т.п.

4.4. Прочие безумные идеи. Сверхкраткий обзор гомологий. Кстати, обращая историю, можно

$$\mathrm{H}^*(X, \mathbb{Z}) := \mathrm{H}^*(\pi_1(X), \mathbb{Z}).$$

В реальной истории построения теории гомологий ("исчисления дыр") можно выделить три этапа:

-комбинаторно-топологический (разбиение пространств на простейшие куски...);
-алгебраический (сингулярные цепи...);
-категорный (гомологическая алгебра иногда заменяется на гомотопическую...).

Последний этап не завершён.

Роль $\mathbb{F}_1$. Включается в игру не упоминавшаяся раньше замечательная категория $\mathcal{ORD}_{\mathrm{fin}}$; функторы

$$\mathcal{ORD}_{\mathrm{fin}} \longrightarrow \longrightarrow_{\mathbb{F}_1} \mathcal{MOD}$$

имеют глубокий топологический смысл.

В частности (Soulé. p. 29), квилленовские

$$\mathrm{K}_m(A) := \pi_m(B\mathsf{GL}_\infty(A))$$

превращаются в

$$\mathrm{K}_m(\mathbb{F}_1) = \pi_m(B\mathsf{S}_\infty) = \pi_m^{\mathrm{stable}}.$$

4.5. Заключение: что дальше? Огромная работа по переводу "всей" алгебраической геометрии на дуровский язык. Систематизировать понимание комбинаторных структур в алгебраической геометрии: не пришли ли из $\mathbb{F}_1$?

Что изучает алгебраическая геометрия?? Наиболее общий взгляд на сегодняшний день...

Правильный язык (включая картинки...), преодоление антиномий.

"Окончательная" теория когомологий (мотивы Гротендика,...)

Лично мне: как можно более современная и полная теория *с*емейств кривых и *м*орфизмов кривых.