Ко второй лекции курса Г.Б.Шабата **Когда 1=0...**

2.1. Перечислите 8-элементные группы. Сразу видны три коммутативные: $\mathsf{Z}_8, \mathsf{Z}_4 \times \mathsf{Z}_2$ и $\mathsf{Z}_2 \times \mathsf{Z}_2 \times \mathsf{Z}_2$. В предположении некоммутативности группы покажите, что в ней существует такой элемент a, что $a^4 = 1$, но $a^2 \neq 1$; выведите отсюда, что множество элементов группы можно представить в виде $\{1, a, a^2, a^3; b, ab, a^2b, a^3b\}$. Докажите равенства $bab^{-1} = a^3$ и $ba^3b^{-1} = a$; теперь вы можете заполнить три четверти таблицы умножения группы. Докажите, что $b^2 \in \{1, a, a^2, a^3\}$; рассмотрев имеющиеся варианты для b^2, заполните оставшуюся четверть таблицы умножения всеми возможными способами. Если вы знакомы с кватернионами, узнайте в одной из получившихся групп мультипликативную группу $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$).

2.2. Начните перечислять 16-элементные группы. Ужаснитесь громоздкости этой задачи и вовремя остановитесь.

2.3. Докажите, что для любого простого p существуют ровно две неизоморфные $2p$-элементные подгруппы.

2.4. Перечислите все q, для которых $\#\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ – факториалы. Попытайтесь установить изоморфизмы таких $\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ с группами перестановок.

2.5. Перечислите все q, для которых $\#\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ – половины факториалов. Попытайтесь установить изоморфизмы таких $\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ с группами чётных перестановок.

2.6. Найдите *центр* группы $\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, состоящий из двух элементов; фактор группы $\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ по её центру обозначается $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$. Установите изоморфизм $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathsf{A}_4$.

2.7. Группа A_4 не проста; интерпретируя её как группу вращений правильного *тетраэдра*, найдите в ней нетривиальный нормальный делитель (например, обращая внимание на пары противоположных рёбер).

2.8. Если вы достигли успеха в задаче 2.5., то вам известен изоморфизм $\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathsf{A}_5$. Постройте вложения S_3 в A_5

а) геометрически, интерпретируя A_5 как группу вращений правильного *икосаэдра*;
б) алгебраически, пользуясь изоморфизмом $\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathsf{S}_3$ (вероятно, обнаруженным вами при решении задачи 2.4) и вложением $\mathbb{F}_2$ в $\mathbb{F}_4$.

Почему образы вложений S_3 не нормальны в A_5?

Ратмино, 21 июля 2009.