К третьей лекции курса Г.Б.Шабата **Когда 1=0...**

**3.1.** Рассмотрим категорию *дифференциальных групп* $\mathcal{DIFFAB}$, объекты которой – пары $(A, d)$, состоящие из абелевой группы $A$ и эндоморфизма $d : A \longrightarrow A$, удовлетворяющего $d \circ d = 0$ (и называемого *дифференциалом*). Морфизмы из $(A, d)$ в $(A', d')$ в этой категории, разумеется – морфизмы групп $f : A \longrightarrow A'$, удовлетворяющие $f \circ d = d' \circ f$.

Назовём морфизмы $f_1, f_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{DIFFAB}}((A, d), (A', d'))$ *гомотопными*, если найдётся такой морфизм групп $h : A' \longrightarrow A$, что $f_1 - f_2 = h \circ d + d' \circ h$. Проверьте, что гомотопность – отношение эквивалентности на любом множестве морфизмов категории $\mathcal{DIFFAB}$. Постройте новую категорию, в которой объекты – те же, что в $\mathcal{DIFFAB}$, а морфизмы – *гомотопические классы* (эквивалентности) морфизмов $\mathcal{DIFFAB}$ (эта категория неявно фигурирует при построении сингулярных гомологий топологических пространств).

**3.2.** Для произвольного кольца $R$ и двух $R$-модулей $M$ и $N$ определите (очевидные) структуры $R$-модулей на абелевой группе $\mathrm{Mor}_{\mathcal{SETS}}(M, N)$ и её подгруппе $\mathrm{Mor}_R(M, N)$. Докажите, что $\mathrm{Mor}_R(M, N)$ является *$R$-подмодулем* в $\mathrm{Mor}_{\mathcal{SETS}}(M, N)$ тогда и только тогда, когда кольцо $R$ коммутативно.

**3.3.** Проверьте аксиомы обобщённого кольца для $\mathbb{F}_1$.

**3.4.** Постройте для любого множества $X$ *монаду эндоморфизмов* $\mathrm{END}_X$, определённую тем, что для любого натурального $n$

$$\mathrm{END}_X(\{1, \ldots, n\}) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{SETS}}(X^n, X).$$

**3.5.** Изучите обобщённое кольцо $\mathbb{Z}_\infty$, определённое эндофунктором

$$S \mapsto\mapsto \{\sum_{s \in S} \lambda_s s | \text{ почти все} \lambda_s = 0, \sum_{s \in S} \lambda_s \leq 1\}$$

в категории множеств.

Ратмино, 22 июля 2009.