Ратмино, 09.7.26

РЕШЕНИЯ ИЗБРАННЫХ ЗАДАЧ
(предварительная версия)

1.6. Вычислите *дзета-функции Хассе-Вейля* нескольких грассманианов

$$\mathrm{Z}(\mathbf{Gr}_{n;k},T) := \exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\#\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_{q^r})}{r}T^r$$

как функции переменной T. Какая информация о грассманиане сохраняется при $q=1$? (Для тех, кто знаком с гипотезами Вейля и когомологиями: какая информация о комплексных грассманианах $\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{C})$ содержится в этих функциях? Что легче: получить эту информацию обсуждаемым способом или *традиционно*?)

Решение. Пользуясь формулой

$$\#\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_q) = \frac{\prod_{a=1}^{n}(1+q+q^2+\cdots+q^{a-1})}{\prod_{b=1}^{k}(1+q+q^2+\cdots+q^{b-1})\prod_{c=1}^{n-k}(1+q+q^2+\cdots+q^{c-1})} =$$

$$= \frac{\prod_{a=k+1}^{n}(1+q+q^2+\cdots+q^{a-1})}{\prod_{c=1}^{n-k}(1+q+q^2+\cdots+q^{c-1})},$$

убеждаемся, что эта рациональная функция от q – многочлен степени $k(n-k)$ с *натуральными* коэффициентами.

Например,

$$\#\mathbf{Gr}_{4;2}(\mathbb{F}_q) = \frac{(1+q+q^2)(1+q+q^2+q^3)}{1+q} = (1+q+q^2)(1+q^2) =$$

$$= 1+q+2q^2+q^3+q^4,$$

и

$$\mathrm{Z}(\mathbf{Gr}_{4;2}(\mathbb{F}_q),T) := \exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\#\mathbf{Gr}_{4;2}(\mathbb{F}_{q^r})}{r}T^r = \exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1+q^r+2q^{2r}+q^{3r}+q^{4r}}{r}T^r =$$

$$= (\exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{T^r}{r})(\exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^rT^r}{r})(\exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2q^{2r}T^r}{r})(\exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^{3r}T^r}{r})(\exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^{4r}T^r}{r}) =$$

$$= \frac{1}{(1-T)(1-qT)(1-q^2T)^2(1-q^3T)(1-q^4T)}.$$

В общем случае, введя обозначение

$$\#\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_q) =: \sum_{i=1}^{k(n-k)} a_i q^i,$$

получаем

$$\mathrm{Z}(\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_q), T) = \exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\#\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_{q^r})}{r}T^r = \exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=0}^{k(n-k)} a_i q^{ir}}{r}T^r =$$

$$= \exp\sum_{i=0}^{k(n-k)}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{a_iq^{ir}}{r}T^r = \prod_{i=1}^{k(n-k)}\exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{a_iq^{ir}}{r}T^r = \prod_{i=0}^{k(n-k)}\frac{1}{(1-q^iT)^{a_i}} =$$

$$= \frac{1}{(1-T)^{a_0}(1-qT)^{a_1}\dots(1-q^{k(n-k)}T)^{a_{k(n-k)}}}.$$

Положив $q = 1$, получаем

$$\mathrm{Z}(\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{F}_1), T) = \frac{1}{(1-T)^{\sum_{i=1}^{k(n-k)} a_i}} = \frac{1}{(1-T)^{\binom{n}{k}}}.$$

Таким образом, при $q = 1$ порядок полюса Z-функции в $T = 1$ равен количеству $\mathbb{F}_1$-точек рассматриваемого многообразия.

Знакомые с гипотезами Вейля узнают в полученных коэффициентах многочлена *числа Бетти* соответствующего комплексного многообразия:

$$a_i = b_{2i}(\mathbf{Gr}_{n;k}(\mathbb{C})).$$

Традиционный прямой способ вычисления этих чисел (с помощью *клеток Шуберта* и т.п.) значительно сложнее. Кроме того, поскольку нечётные гомологии грассманианов тривиальны, возникшие выше суммы чисел Бетти $\sum a_i$ равны *эйлеровым характеристикам* грассманианов.

3.3. Проверьте аксиомы обобщённого кольца для $\mathbb{F}_1$.

Решение. Обобщённое кольцо $\mathbb{F}_1$ определяется как эндофунктор

$$\Sigma :: \mathcal{SETS} \longrightarrow\!\!\longrightarrow \mathcal{SETS} :: X \mapsto\!\!\mapsto \{0\} \coprod X$$

вместе с преобразованием

$$\mu : \Sigma^2 \Longrightarrow \Sigma,$$

определяемым системой отображений, "параметризованных" $X \in\in \mathcal{SETS}$,

$$\mu_X : \{0\} \coprod \{0\} \coprod X \longrightarrow \{0\} \coprod X,$$

переводящих "оба" 0 в 0 и тождественных на остальных частях множеств, и преобразованием

$$\epsilon : \mathbf{1}_{\mathcal{SETS}} \Longrightarrow \Sigma,$$

определяемом каноническими вложениями $X \longrightarrow \{0\} \coprod X$.

"Ассоциативность"

$$\mu_X \circ \Sigma(\mu_X) = \mu_X \circ \mu_\Sigma(X) : \Sigma^3(X) \longrightarrow \Sigma(X)$$

для множества X означает совпадение двух отображений

$$\{0\} \coprod \{0\} \coprod \{0\} \coprod X \longrightarrow \{0\} \coprod X,$$

отождествляющих три экземпляра нулей в разном порядке.

"Нейтральность"

$$\mu_X \circ \epsilon_{\Sigma(X)} = \mu_X \circ \Sigma(\epsilon_X) = 1_{\Sigma(X)} : \Sigma(X) \longrightarrow \Sigma(X)$$

для множества X проверяется непосредственно: по определению

$$[\mu_X \circ \epsilon_{\Sigma(X)}](\Sigma(X)) = [\mu_X \circ \Sigma(\epsilon_X)](\Sigma(X)) = \mu_X(\{0\} \coprod \{0\} \coprod X) = \{0\} \coprod X.$$

Алгебраичность не вызывает сомнений.

3.4. Постройте для любого множества X *монаду эндоморфизмов* END_X, определённую тем, что для любого натурального n

$$\mathrm{END}_X(\{1,\ldots,n\}) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{SETS}}(X^n, X).$$

Решение. Обобщённое кольцо END_X определяется как эндофунктор

$$\Sigma :: \mathcal{SETS} \longrightarrow\!\!\longrightarrow \mathcal{SETS} :: X \mapsto\!\!\mapsto \coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{SETS}}(X^n, X),$$

которое надо понимать как сопоставление каждому множеству множества всех сколько-угодно-арных операций на нём. Введём отображение *арность*

$$\mathrm{arity} : \coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{SETS}}(X^n, X) \longrightarrow \mathbb{N},$$

однозначно определённое условием

$$\mathrm{arity}|_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{SETS}}(X^n,X)} \equiv n.$$

Пусть дан элемент $\Phi \in \Sigma^2(X)$ арности r; любому набору $(\phi_1,\ldots,\phi_r)$, составленному из r операций на X произвольных арностей он сопоставляет некоторую операцию

$$\Phi[\phi_1,\ldots,\phi_r] : X \times X \times \ldots .$$

Её арность для общего набора мы не указываем, однако вводим обозначение

$$\rho_\Phi := \mathrm{arity}(\Phi[1_X,\ldots,1_X]).$$

Теперь мы можем задать преобразование

$$\mu : \Sigma^2 \Longrightarrow \Sigma,$$

системой отображений

$$\mu_X : \Sigma^2(X) \longrightarrow \Sigma(X) : \Phi \mapsto \Phi[1_X,\ldots,1_X].$$

Иначе говоря, $\mu(\Phi)$ есть ρ_Φ-местная операция

$$(x_1, \ldots, x_{\rho_\Phi}) \mapsto \Phi[1_X, \ldots, 1_X](x_1, \ldots, x_{\rho_\Phi}).$$

Преобразование

$$\epsilon : \mathbf{1}_{\mathcal{SETS}} \Longrightarrow \Sigma$$

является тождественным.

3.5. Изучите обобщённое кольцо $\mathbb{Z}_\infty$, определённое эндофунктором

$$S \mapsto\mapsto \{\sum_{s \in S} \lambda_s s | \lambda_s \in \mathbb{R}, \text{ почти все } \lambda_s = 0, \sum_{s \in S} |\lambda_s| \leq 1\}$$

в категории множеств.

Решение. Преобразование

$$\mu : \Sigma^2 \Longrightarrow \Sigma,$$

задаётся очевидным "правилом раскрытия скобок". Преобразование

$$\epsilon : \mathbf{1}_{\mathcal{SETS}} \Longrightarrow \Sigma$$

задаётся системой $S \longrightarrow \Sigma(S) : s \mapsto 1 \cdot s$.