Теория инвариантов

Как описать многочлены, которые не меняются при любой перестановке переменных? Оказывается, такие многочлены выражаются однозначно через элементарные симметрические многочлены

$$x_1 + \ldots + x_n, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \quad \ldots, \quad x_1 \ldots x_n.$$

Заметим, что в данной ситуации все инварианты выражаются через *конечное число* многочленов между которыми *нет соотношений*.

Рассмотрим другую задачу: как описать многочлены от переменных x и y, которые не меняются при одновременной замене $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$? Несложно показать, что это многочлены, которые выражаются через $u = x^2$, $v = xy$ и $w = y^2$. Опять же, все инварианты выражаются через конечное число, но между ними есть соотношение: $uw = v^2$.

Давид Гильберт показал, что конечная порожденность инвариантов имеет место в очень общей ситуации — эта теорема по сути положила начало коммутативной алгебре. Отсутствие соотношений между инвариантами, наоборот, имеет место довольно редко. Мы обсудим как аналогичные алгебраические вопросы, так и геометрию, которая при этом возникает (например, $uw = v^2$ — уравнение конуса).

Приблизительная программа курса

- Отсутствие соотношений между инвариантами и группы, порожденные отражениями.
- Алгебро-геометрическое соответствие.
- Клейновы особенности.
- Конечная порожденность инвариантов.
- Геометрическая теория инвариантов и пространства модулей.

Требования к слушателям

Для понимания курса требуется знать линейную алгебру и немного абстрактной алгебры (нужно знать, что такое группа, и что такое кольцо).