Листок №1

Диаграммы Юнга, ортогональные полиномы и случайные матрицы

(А.И. Буфетов, Н.Е. Козин)

1. Докажите неравенство:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Указание: используйте индукцию.

2. Пусть $0 < p < 1$. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $n_0 > 0$, зависящие лишь от ε и p, такие что для всякого $n > n_0$ и k, удовлетворяющих

$$\left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon,$$

выполнено

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k (1-p)^{n-k} \leq e^{-n\delta}.$$

3. Пусть $\Omega_2(n) = \{0, 1\}^n$ есть множество всех двоичных слов длины n. Возьмем $p \in (0, 1)$ и определим *вероятность* слова $w \in \Omega_2(n)$ формулой

$$P(w) = p^{N_0(w)} \cdot (1-p)^{N_1(w)},$$

где $N_0(w)$ – число нулей в слове w, а $N_1(w)$ – число единиц в слове w.

а) Проверьте что

$$\sum_{w \in \Omega_2(n)} P(w) = 1.$$

б) Возьмем $\varepsilon > 0$ и определим множество

$$\Omega_2(n, \varepsilon) = \left\{ w \in \Omega_2(n) : \left| \frac{N_0(w)}{n} - p \right| > \varepsilon \right\}.$$

Убедитесь, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\lim_{n \to \infty} P(\Omega_2(n, \varepsilon)) = 0.$$

Замечание.

$$P(\Omega_2(n, \varepsilon)) = \sum_{w \in \Omega_2(n, \varepsilon)} P(w).$$

в) Проверьте, что в действительности вероятность $P(\Omega_2(n, \varepsilon))$ убывает экспоненциально.