Листок №3

Диаграммы Юнга, ортогональные полиномы и случайные матрицы

(А.И. Буфетов, Н.Е. Козин)

1. Пусть $\rho(x)$ – неотрицательная функция на $\mathbb{R}$ такая что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = 1$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n \rho(x)\,dx < +\infty$ для всех натуральных n и $p_n(x)$ – система ортонормальных полиномов с нормой $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p^2(x)\rho(x)\,dx = 1$.

а) Докажите что для ортогональных полиномов $p_n(x)$ справедливо рекуррентное соотношение

$$p_n(x) = (A_n x + B_n)\, p_{n-1}(x) - C_n p_{n-2}(x), \quad \left(A_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}, \quad C_n = \frac{k_n k_{n-2}}{k_{n-1}^2} \right),$$

где k_n – коэффициент при члене x^n полинома $p_n(x)$.

б) Докажите что для ортогональных полиномов $p_n(x)$ справедлива формула Christoffel'я-Darboux:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, p_k(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \cdot \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}.$$

2. а) Докажите что полиномы Legendre'а, определяемые формулой Rodrigues'а как

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^n \right]$$

могут быть таже определены как коэффициенты разложения в ряд функции

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\, t^n.$$

б) Покажите что для полиномов Legendre'а справедлива рекурсивная формула Bonnet:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

в) Покажите что полиномы Legendre'а удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + x(x+1)y = 0.$$

3. а) Докажите что полиномы Laguerre'а, определяемые формулой Rodrigues'а как

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^n e^{-x} \right]$$

ортогональны с весом e^{-x} и могут быть таже определены как коэффициенты разложения в ряд функции

$$\frac{1}{1-t} \cdot \exp\left(-\frac{xt}{1-t} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)\, t^n.$$

б) Покажите что для полиномов Laguerre'а справедлива рекурсивная формула

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

в) Покажите что полиномы Laguerre'а удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

г) Найдите формулу для определения коэффициентов полиномов Laguerre'а.