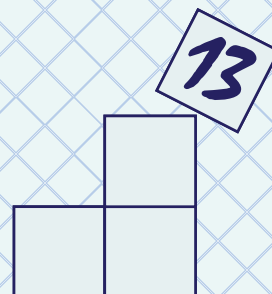


|   |    |   |    |    |  |  |  |  |
|---|----|---|----|----|--|--|--|--|
| 1 | 2  | 5 | 10 | 12 |  |  |  |  |
| 3 | 4  |   |    |    |  |  |  |  |
| 6 | 11 |   |    |    |  |  |  |  |
| 7 |    |   |    |    |  |  |  |  |
| 8 |    |   |    |    |  |  |  |  |
| 9 |    |   |    |    |  |  |  |  |
|   |    |   |    |    |  |  |  |  |

А.И. Буфетов М.М. Житлухин Н.Е. Козин

# Диаграммы Юнга



# Оглавление

|  |    |
|--|----|
| Оглавление . . . . .                           | 2  |
| Глава 1. Диаграммы Юнга . . . . .              | 3  |
| Глава 2. Интеграл крюков . . . . .             | 8  |
| Глава 3. Лемма 1 . . . . .                     | 12 |
| Глава 4. Лемма 2 . . . . .                     | 16 |
| Глава 5. Экстремаль интеграла крюков . . . . . | 20 |
| Глава 6. Лемма 3 . . . . .                     | 24 |
| Глава 7. Связь с соболевской нормой . . . . .  | 31 |
| Глава 8. Существенные диаграммы Юнга . . . . . | 35 |
| Глава 9. Основная теорема . . . . .            | 37 |
| Глава 10. Оценка длины первой строки . . . . . | 40 |
| Литература . . . . .                           | 44 |

# Глава 1

## Диаграммы Юнга

Говоря о натуральных числах, *разбиение* (англ. – *partition*) — это представление числа в виде суммы нескольких чисел. Очевидно, что подобным образом число может быть "разобрано" на слагаемые различными способами. Действительно,

$$11 = 1 + 1 + 1 + 3 + 5$$

или же

$$11 = 6 + 4 + 1.$$

В силу коммутативности сложения, при разбиении интерес представляет только состав слагаемых, но не их порядок. Поэтому, например

$$11 = 7 + 2 + 1 + 1$$

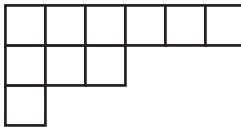
и

$$11 = 2 + 1 + 7 + 1$$

принято считать одним и тем же разбиением, которое далее будем представлять в виде суммы невозрастающей последовательности чисел. Если считать единицу за базовый "строительный элемент" натуральных чисел,

$$1 = \square$$

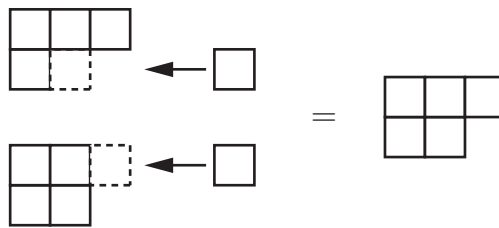
то каждое число можно наглядно представить графически в виде кирпичиков-клеток единиц, объединенных вместе. В частности, *Диаграммы Юнга* (англ. – *Young tableaux*, часто также называемые *Диаграммами Феррара*, англ. – *Ferrari's diagrams* или просто *Ferrars*)

$$10 = 3+2+2+1+1+1 =$$


представляют собой способ графического представления не только самого числа, но и его разбиения.

Идея такого представления очевидна из рисунка: число клеток в первой строке, не имеющих под собой других клеток — есть число единиц в данном разбиении; число клеток в первой строке, имеющих под собой только одну клетку — есть число двоек в разбиении и.т.д. Добавив требование, чтобы высота столбцов в каждой диаграмме могла разве что только увеличиваться при перемещении слева-направо, получим однозначное представление каждого разбиения натурального числа  $N$  диаграммой Юнга. Далее, диаграмму  $\lambda$  состоящую из  $N$  клеток будем называть диаграммой размера  $N$ .

Понятно то, что каждая диаграмма *размера*  $N$  может быть получена путем добавления к одной из диаграмм размера  $N - 1$  дополнительной клетки справа в одной из строк. Между тем, как показывает следующий пример, таких "диаграмм-предшественниц" может оказаться несколько!



Безусловно, при добавлении новой клетки в строки начиная со второй, следует обратить внимание чтобы над добавленной клеткой не было пустого пространства. Теперь, если начать строить диаграммы, взяв за основу диаграмму размера один, то мы получим граф, подобный изображенному на Рисунке 1.1. Легко заметить, что если продолжать построение графа, то крайними слева всегда будут стоять диаграммы, соответствующие разбиению

$$N = N$$

а справа разбиению

$$N = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{N \text{ раз}}.$$

Из вершины графа в такие диаграммы будет вести всегда только один путь. В то же время для диаграмм одного размера, наибольшим числом путей, очевидно, будут характеризоваться диаграммы расположенные ближе к центру в соответствующем ярусе графа.

Очевидно, в случае нечетного размера максимальное число путей будет иметь одна диаграмма, а в случае четного размера — две.

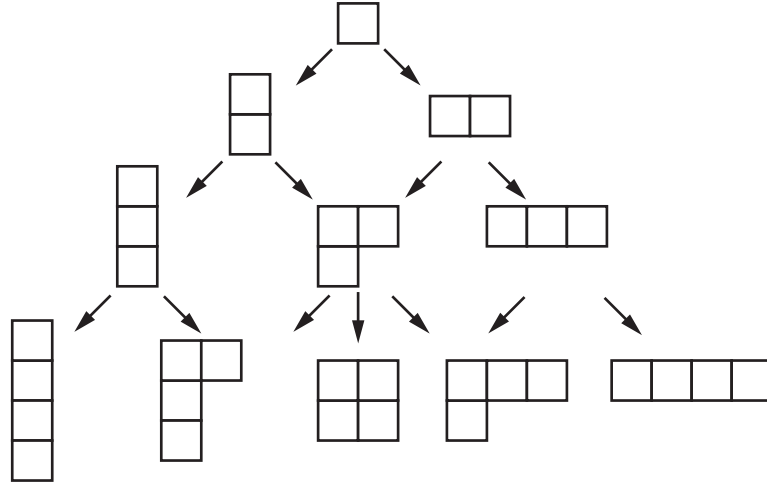


Рис. 1.1: Граф путей диаграмм Юнга до размерности  $N = 4$

Если теперь попытаться ввести вероятностную меру  $\mu(\lambda)$  для диаграмм одного и того же размера, то логично было бы придать большую вероятность тем диаграммам, в которые ведет большее число путей, то есть лежащим ближе к центру. Действительно, если начать двигаться вниз по графу начиная с вершины, и произвольным образом но с равной вероятностью выбирать на каждом ярусе путь направо или налево, то после конечного числа шагов мы с большей вероятностью попадем в одну из диаграмм центральной части яруса, нежели чем в диаграмму расположенную "на периферии". В этой работе нас прежде всего будет интересовать вопрос: среди всех диаграмм заданного размера  $N$  какую форму будет иметь диаграмма имеющая наибольшее число ведущих в нее путей? Везде далее, если мы хотим подчеркнуть размер диаграммы  $\lambda$ , будем обозначать ее  $\lambda_N$ . Также, введя обозначение для числа путей ведущих в диаграмму как  $\dim \lambda$  (*размерность* диаграммы), определим так называемую *меру Планшереля*, которой и будем пользоваться в дальнейшем:<sup>1</sup>

$$\mu(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{N!}. \quad (1.1)$$

Для получения возможности вычисления размерности  $\dim \lambda$ , снова обратимся к построению диаграмм путем добавления клеток. Если, спускаясь по графу вниз к выбранной диаграм-

<sup>1</sup>Использование выражения  $\dim$ , как и термина "размерность" здесь обусловлено связью с теорией представлений. Действительно, число путей, ведущих в диаграмму  $\lambda$  есть ни что иное, как размерность соответствующего ей представления симметрической группы перестановок  $n$  символов.

ме  $\lambda$  мы будем каждый раз нумеровать вновь добавляемые клетки, увеличивая на каждом этапе спуска нумерацию на единицу, то получим новое обозначение диаграмм с точностью до ведущего в них конкретного пути (Рисунок 1.2). Легко заметить, что при такой нумерации добавляемых клеток, в каждой построенной диаграмме при следовании по строке слева-направо и по столбцу сверху-вниз, номера могут только возрастать. Таким образом, число путей  $\dim \lambda$ , ведущих в диаграмму заданной формы и размеа  $N$  будет равно числу способов размещения  $N$  последовательных натуральных чисел в ее клетках таким образом, чтобы выполнялось указанное правило возрастания номеров.

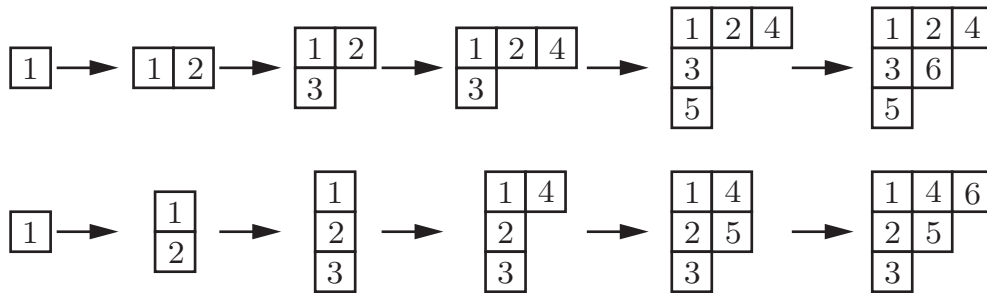


Рис. 1.2: Два различных пути построения диаграммы размерности  $N = 6$

Последнее понятие, которое нам понадобится на начальном этапе — это понятие крюка. *Крюком клетки*  $\square$  в диаграмме  $\lambda$  являются сама клетка  $\square$ , а также все клетки, расположенные от нее справа в той же строке и снизу в том же столбце. Соответственно, *длиной крюка* клетки  $\square$  называется число составляющих этот крюк клеток. В дальнейшем длину крюка клетки  $\square$  будем обозначать как  $h(\square)$  (*англ.* – *hook*). На Рисунке 1.3 показан пример крюка одной из клеток диаграммы размера  $N = 33$ .

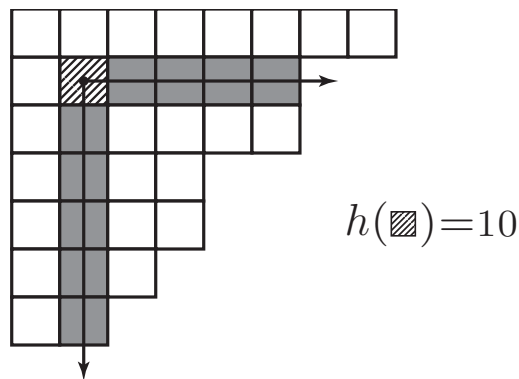


Рис. 1.3: Пример крюка длины  $h = 10$

Оказывается, с помощью значений длин крюков, размерность  $\dim \lambda$  может быть получена для любой диаграммы размера  $N$  как

$$\dim \lambda = \frac{N!}{\prod_{\square \in \lambda} h(\square)}, \quad (1.2)$$

где в знаменателе стоит произведение длин крюков всех клеток диаграммы. Подробное доказательство этой замечательной формулы, носящей имя Фрейма-Робинсона-Трелла, можно найти в [2]. Сопоставляя (1.1) с (1.2), можно записать

$$\mu(\lambda) = \frac{N!}{\prod_{\square \in \lambda} h^2(\square)}. \quad (1.3)$$

В следующей главе мы рассмотрим геометрическое преобразование диаграммы Юнга и введем понятие интеграла крюков.

В 1985 году Вершик и Керов в СССР и Логан и Шенп в США независимо друг от друга смогли показать, что с ростом  $N$  форма диаграмм с большим весом будет асимптотически стремиться к определенному виду. Далее мы сможем точно описать форму произвольной диаграммы  $\lambda$  графиком соответствующей ей функции  $L_\lambda(x)$ . Тогда теорему Вершика и Керова можно сформулировать в виде следующего утверждения:

$$\mu\{\lambda \mid \|L_\lambda(x) - \Omega(x)\| > \varepsilon\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

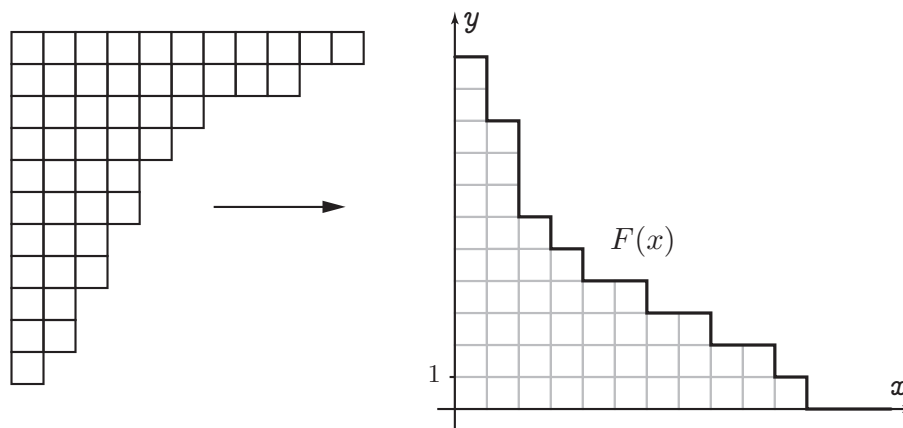
где  $\Omega(x)$  – функция, график которой как раз и определяет такую асимптотическую форму. То есть доля диаграмм, отклоняющихся от предельной формы, будет становиться ничтожно малой. В Главе 10 мы дадим другую формулировку такой теоремы.

Наметим основные шаги доказательства. Сначала в Главе 2 мы прологарифмируем выражение для меры Планшереля (1.3) чтобы перейти от произведения в знаменателе к сумме. В Главе 3 будет доказана лемма, утверждающая что такая сумма может быть заменена интегралом, называемым интегралом крюков. В Главе 4 мы прибегнем к гомотетическому сжатию и повороту диаграммы, что позволит нам описать ее границу с помощью вышеупомянутой функции  $L_\lambda(x)$ . В Главе 5 мы опишем экстремаль  $\Omega(x)$ , определяющую предельную форму диаграмм. В Главе 6 будет доказана еще одна лемма, позволяющая представить отклонение  $L_\lambda(x)$  от экстремали через интеграл крюков. В Главе 7 будет показано, что такое отклонение фактически является соболевской нормой. В Главе 8 мы выделим определенный подкласс диаграмм, имеющих большую меру Планшереля. Наконец, в главе 9, мы сформулируем и докажем основную теорему Вершика и Керова. Глава 10 будет иметь вспомогательный характер, где мы рассмотрим оценки длины первой строки как следствие доказанной теоремы.

## Глава 2

# Интеграл крюков

Прежде чем перейти к интегралу крюков, зададимся вопросом, как можно описать форму произвольной диаграммы  $\lambda$ . Вообще говоря, вид диаграммы может быть точно задан описанием границы клеток, лежащих справа. Действительно, если принудительно ввести оси координат, направив их вдоль левой и верхней границ диаграммы, совместив начало координат с верхним левым углом первой клетки, то правая граница фактически будет представлять график кусочно-непрерывной невозрастающей функции с нулевой производной во всех точках своей дифференцируемости. Обозначим такую функцию как  $F(x)$  и будем считать, что клетки диаграммы имеют единичную сторону. Легко заметить, что тогда площадь диаграммы, она же область под графиком  $F(x)$ , будет равна  $N$ .



Возвращаясь к формуле для меры Планшереля (1.3), полученной в предыдущей главе, чтобы перейти от произведения крюков к сумме, прологарифмируем все выражение

$$\log \mu(\lambda) = \log N! - 2 \sum_{\square \in \lambda} \log h(\square).$$



Используя формулу Стиглинга

$$N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right),$$

можно переписать последнее выражение как

$$\log \mu(\lambda) = \log \left(\sqrt{2\pi N}(1 + O(N^{-1}))\right) + N \log N - N - 2 \sum_{\square \in \lambda} \log h(\square).$$

Заметив, что число слагаемых в последней сумме равно  $N$ , а также что

$$N \log N = 2N \log \sqrt{N}$$

после небольшой перегруппировки приходим к формуле

$$\log \mu(\lambda) = \log \left(\sqrt{2\pi N}(1 + O(N^{-1}))\right) - N \left(1 + \frac{2}{N} \sum_{\square \in \lambda} \log \frac{h(\square)}{\sqrt{N}}\right).$$

Разделив все выражение на  $-\sqrt{N}$ , получим такое равенство

$$-\frac{\log \mu(\lambda)}{\sqrt{N}} = \sqrt{N} \left(1 + \frac{2}{N} \sum_{\square \in \lambda} \log \frac{h(\square)}{\sqrt{N}}\right) - \varepsilon(N), \quad (2.1)$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\log \sqrt{2\pi N} + \log(1 + O(N^{-1}))\right) = o\left(\frac{\log N}{\sqrt{N}}\right).$$

Анализируя выражение стоящее в скобках в (2.1)

$$1 + \frac{2}{N} \sum_{\square \in \lambda} \log \frac{h(\square)}{\sqrt{N}} \quad (2.2)$$

можно прийти к идее, что при росте числа клеток  $N$ , а также постепенном уменьшении их размера, фигурирующая здесь сумма могла бы перейти в интеграл! Чтобы проделать этот важный шаг, нам надо во-первых, расширить понятие крюка, определив его для произвольной точки внутри диаграммы; во-вторых, для возможности сравнения, нужно найти способ нормировать диаграммы. Последнее можно сделать, например, путем приведения диаграмм к одинаковой площади. Очевидно, при такой нормировке размеры клеток будут уменьшаться с ростом  $N$ .

Для того чтобы ввести определение длины крюка аналогичное тому, что мы дали в первой главе, условимся считать  $F^{-1}(y) = \inf\{x | F(x) \leq y\}$ . Тогда, обозначив крюк точки

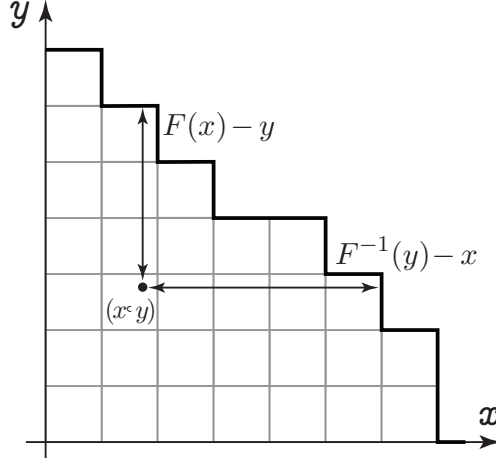


Рис. 2.1: Вычисление длины крюка для произвольной точки  $(x, y)$

$(x, y)$  как  $h(x, y)$ , по аналогии с определением крюка клетки, мы можем положить (см. Рисунок 2.1)

$$h(x, y) = F(x) - y + F^{-1}(y) - x. \quad (2.3)$$

Введем нормировку диаграммы  $\lambda$  путем ее сжатия по каждой координате в  $\sqrt{N}$  раз. Легко заметить что такое преобразование будет приводить все диаграммы к единичной площади. Далее будем обозначать такую нормированную диаграмму через  $\Lambda$  или, если мы хотим подчеркнуть ее размерность — даже  $\Lambda_N$ . Очевидно, такая нормировка никак не отразится на (2.2) так как

$$\frac{2}{N} \sum_{\square \in \lambda} \log \frac{h(\square)}{\sqrt{N}} = \frac{2}{N} \sum_{\square \in \Lambda} \log \frac{h(\square)}{\sqrt{N}}, \quad (2.4)$$

поэтому в дальнейшем все внимание можно будет переключить на сумму

$$\frac{2}{N} \sum_{\square \in \Lambda} \log \frac{h(\square)}{\sqrt{N}}, \quad (2.5)$$

которую будем называть *интегральной суммой*. В то же время, считая  $dx = dy = 1/\sqrt{N}$  и устремив  $N \rightarrow \infty$ , можно подозревать, что интегральная сумма (2.5) могла бы перейти в интеграл где интегрирование будет вестись по всей области клеток диаграммы. В дальнейшем мы будем использовать *интеграл крюков*, который, по аналогии, определим для произвольной функции  $F(x)$  как

$$\theta_F = 1 + 2 \iint_{S_F} \log h(x, y) dx dy,$$

где интегрирование ведется по всем точкам области  $S_F$ , лежащей под графиком функции  $F(x)$ . Очевидно, что если  $F(x) = F_\Lambda(x)$  — функция границы нашей нормированной диаграммы  $\Lambda$ , то

$$\theta_{F_\Lambda} = 1 + 2 \iint_{\Lambda} \log h(x, y) dx dy. \quad (2.6)$$

Несмотря на то, что в интеграле крюков под логарифмом отсутствует, казалось бы, ожидаемый множитель  $1/\sqrt{N}$ , в следующей главе мы покажем, что именно такой вид интеграла крюков (2.6) действительно может быть использован для оценки интересующей нас интегральной суммы (2.5).

## Глава 3

### Лемма 1

В этой главе мы подробно рассмотрим доказательство леммы, устанавливающей отклонение интеграла крюков (2.6) от интегральной суммы (2.5). Перейдем непосредственно к формулировке.

**Лемма 1.**

$$\frac{2}{N} \sum_{\square \in \Lambda} \log \frac{h(\square)}{\sqrt{N}} - 2 \iint_{\Lambda} \log h(x, y) dx dy = \frac{1}{N} \sum_{\square \in \Lambda} c(h(\square)), \quad (3.1)$$

$$\text{где } c(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)x^{2k}}; \quad (3.2)$$

в частности, эта разность всегда положительна для любой диаграммы  $\Lambda$ .

**Доказательство.** Пусть  $\square_{ij}$  — клетка  $(i, j)$  сжатой в  $\sqrt{N}$  диаграммы Юнга  $\Lambda$ . Индексация  $(i, j)$  соответствует клетке в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце. При расположении осей координат как на Рисунке , нумерация строк ведется снизу-вверх, а столбцов слева-направо.

Считая что  $(x, y) \in \square_{ij}$  и  $x_i, y_j$  — координаты центра клетки, длину крюка произвольной точки (2.3) можно выразить через длину крюка  $h(\square_{ij})$  клетки, в которой она лежит:

$$h(x, y) = \frac{h(\square_{ij})}{\sqrt{N}} - (x - x_i) - (y - y_j).$$

Подставляя это выражение в интеграл крюков, имеем

$$2 \iint_{\Lambda} \log h(x, y) dx dy = 2 \sum_{\square_{ij} \in \Lambda} \iint_{\square_{ij}} \log \left( \frac{h(\square_{ij})}{\sqrt{N}} - (x - x_i) - (y - y_j) \right) dx dy =$$

после подстановки  $x - x_i = \frac{u}{2\sqrt{N}}$ ,  $y - y_j = \frac{v}{2\sqrt{N}}$  и переобозначения  $\square_{ij} = \square$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2N} \sum_{\square \in \Lambda_{-1}^{-1}} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \log \left( \frac{h(\square)}{\sqrt{N}} - \frac{u}{2\sqrt{N}} - \frac{v}{2\sqrt{N}} \right) du dv = \\
&= \frac{1}{2N} \sum_{\square \in \Lambda_{-1}^{-1}} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \log \left( \frac{h(\square)}{\sqrt{N}} \left( 1 - \frac{u}{2h(\square)} - \frac{v}{2h(\square)} \right) \right) du dv = \\
&= \frac{2}{N} \sum_{\square \in \Lambda} \log \frac{h(\square)}{\sqrt{N}} + \sum_{\square \in \Lambda} \frac{1}{2N} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \log \left( 1 - \frac{u}{2h(\square)} - \frac{v}{2h(\square)} \right) du dv.
\end{aligned}$$

Таким образом, разность между интегральной суммой и интегралом крюков в точности равна

$$\frac{1}{N} \sum_{\square \in \Lambda} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \log \left( 1 - \frac{u}{2h(\square)} - \frac{v}{2h(\square)} \right) du dv.$$

Чтобы оценить здесь двойной интеграл стоящий под знаком суммы, разобьем его на части. Также, для простоты записи, везде далее будем обозначать  $h(\square)$  как  $h$ .

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \log \left( 1 - \frac{u}{2h} - \frac{v}{2h} \right) du dv = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \log(2h - u - v) du dv - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \log(2h) du dv = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \log(2h - u - v) du dv - 2 \log 2h. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

В последнем выражении внутренний интеграл по переменной  $u$  вычислим интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1} \log(2h - u - v) du = u \log(2h - u - v) \Big|_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} \frac{u du}{2h - u - v} = \\
&= \log(2h - 1 - v) + \log(2h + 1 - v) + \int_{-1}^{+1} \frac{(-2h + u + v) + (2h - v)}{2h - u - v} du =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log(2h - 1 - v) + \log(2h + 1 - v) - 2 - (2h - v) \log(2h - u - v) \Big|_{-1}^{+1} = \\
&= \log(2h - 1 - v) + \log(2h + 1 - v) - 2 - (2h - v) \log(2h - 1 - v) + (2h - v) \log(2h + 1 - v) = \\
&= -(2h - 1 - v) \log(2h - 1 - v) + (2h + 1 - v) \log(2h + 1 - v) - 2.
\end{aligned}$$

Чтобы продолжить интегрирование по переменной  $v$ , мы сначала рассмотрим интеграл, который используем в дальнейшем:

$$t \log t \, dt = t^2 \log t - \int t(\log t + 1) \, dt = t^2 \log t - \int t \log t \, dt - \frac{t^2}{2},$$

откуда немедленно следует

$$\int t \log t \, dt = \frac{t^2 \log t}{2} - \frac{t^2}{4}.$$

Используя этот результат, мы можем закончить интегрирование:

$$\begin{aligned}
& - \int_{-1}^{+1} (2h - 1 - v) \log(2h - 1 - v) \, dv + \int_{-1}^{+1} (2h + 1 - v) \log(2h + 1 - v) \, dv - 2 \int_{-1}^{+1} dv = \\
&= \int_{-1}^{+1} (2h - 1 - v) \log(2h - 1 - v) \, d(2h - 1 - v) - \int_{-1}^{+1} (2h + 1 - v) \log(2h + 1 - v) \, d(2h + 1 - v) - 4 = \\
&= \left( \frac{(2h - 1 - y)^2 \log(2h - 1 - y)}{2} - \frac{(2h - 1 - y)^2}{4} \right) \Big|_{-1}^{+1} - \\
&\quad - \left( \frac{(2h + 1 - y)^2 \log(2h + 1 - y)}{2} - \frac{(2h + 1 - y)^2}{4} \right) \Big|_{-1}^{+1} - 4 = \\
&= \left( \frac{(2h - 2)^2 \log(2h - 2)}{2} - \frac{(2h)^2 \log 2h}{2} \right) - \left( \frac{(2h - 2)^2}{4} - \frac{(2h)^2}{4} \right) - \\
&- \left( \frac{(2h)^2 \log(2h)}{2} - \frac{(2h + 2)^2 \log(2h + 2)}{2} \right) + \left( \frac{(2h)^2}{4} - \frac{(2h + 2)^2}{4} \right) - 4 = \\
&= (2(h - 1))^2 \log 2(h - 1) - 2h^2 \log 2h - ((h - 1)^2 - h^2) - \\
&\quad - (2h^2 \log 2h - 2(h + 1)^2 \log 2(h + 1)) + (h^2 - (h + 1)^2) - 4.
\end{aligned}$$

Прямые вычисления показывают, что последнее выражение упрощается до

$$4 \log 2 + (2(h - 1)^2) \log(h - 1) - 4h^2 \log h + (2(h + 1)^2) \log(h + 1) - 6.$$

Вспоминая (3.3), разделим все выражение на 2 и, вычтя  $2 \log 2h$ , останемся с

$$(h-1)^2 \log(h-1) - 2(h^2+1) \log h + (h+1)^2 \log(h+1) - 3.$$

После небольшой перегруппировки членов приходим к

$$\begin{aligned} & - (2 \log h - \log(h-1) - \log(h+1)) - (2h^2 \log h - h^2 \log(h-1) - h^2 \log(h+1) - 1) - \\ & \quad - (2h \log(h-1) - 2h \log(h+1) + 4) = \\ & - \left[ \log \frac{h^2}{h^2-1} \right] - \left[ h^2 \left( \log(h^2) - \log(h^2-1) - \frac{1}{h^2} \right) \right] - \left[ -2h \left( \log \frac{h+1}{h-1} - \frac{2}{h} \right) \right]. \end{aligned}$$

Применяя формулу для рядов 1.513(3) из [3] к первым двум слагаемым и формулу 1.513(2) к последнему, получаем:

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kh^{2k}} - h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)h^{2(k+1)}} + 4h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)h^{2k+1}},$$

что легко упрощается до

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)h^{2k}}$$

тем самым завершая доказательство леммы.

## Глава 4

### Лемма 2

Проанализируем доказанную в предыдущей главе лемму. Помня о том, что сжатие диаграммы не влияет на значение интегральной суммы (см. (2.4)), перепишем выражение (2.1) для вероятностной меры как

$$-\frac{\log \mu(\lambda)}{N} = \left( 1 + \frac{2}{N} \sum_{\square \in \Lambda_N} \log \frac{h(\square)}{\sqrt{N}} \right) - \frac{\varepsilon(N)}{\sqrt{N}},$$

где  $\Lambda_N$  - нормированная диаграмма  $\lambda_N$ . Теперь, применяя результат (3.1) доказанной Леммы 1, получим

$$-\frac{\log \mu(\lambda)}{N} = 1 + 2 \iint_{\Lambda_N} \log h(x, y) dx dy + \frac{1}{N} \sum_{\square \in \Lambda_N} c(h(\square)) - \frac{\varepsilon(N)}{\sqrt{N}}.$$

Так как здесь последние два слагаемых стремятся к 0 при с ростом  $N$ , то

$$-\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(\lambda_N)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \theta_{F_{\Lambda_N}}.$$

Если последний предел существует, то есть  $F_{\Lambda_N} \rightarrow F$ , то окончательно получаем

$$-\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(\lambda_N)}{N} = \theta_F. \quad (4.1)$$

Для исследования асимптотического поведения интеграла крюков нам понадобится сделать еще один штрих. Повернем нормированную диаграмму на угол  $\pi/4$  радиан против часовой стрелки относительно начала координат. Кроме того, проведем еще одно равномерное сжатие диаграммы по каждой из осей в  $\sqrt{2}$  раз (при таком преобразовании площадь диаграммы станет равной  $\frac{1}{2}$ ). Легко видеть, что это преобразование осуществляется



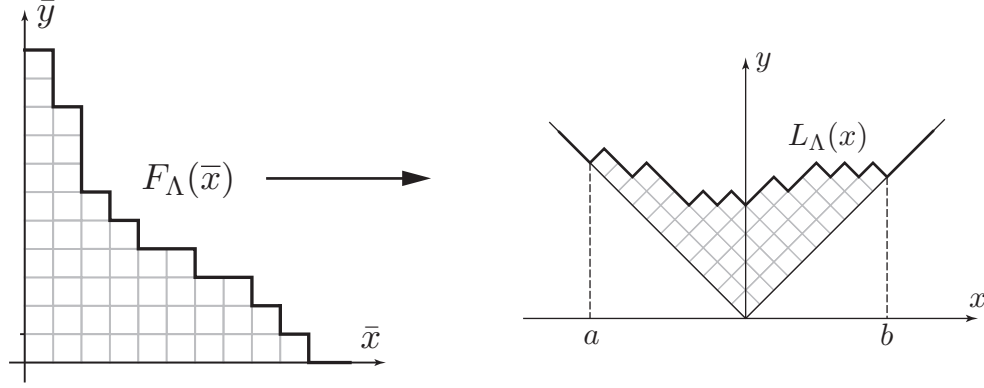


Рис. 4.1: Диаграмма Юнга после поворота и сжатия в  $\sqrt{2}$  раз

формулами

$$x = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, \quad y = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, \quad (4.2)$$

где  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  — координаты нормированной диаграммы в старой системе координат. При этом график функции  $F_\Lambda(x)$  перейдет в график функции, которую обозначим  $L_\Lambda(x)$ . Такая функция  $L_\Lambda(x)$  обладает следующими очевидными свойствами:

- за пределами интерьера конечного интервала  $[a, b]$  ее график совпадает с функцией модуля, то есть  $L_\Lambda(x) = |x|$ ;
- функция  $L_\Lambda(x)$  дифференцируема везде, за исключением конечного числа точек, соответствующих углам клеток диаграммы, причем  $L'_\Lambda(x) = \pm 1$ ;
- площадь диаграммы  $\Lambda$  будет определяться как интеграл разности  $L(x)$  и модуля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (L_\Lambda(x) - |x|) dx = \int_a^b (L_\Lambda(x) - |x|) dx = \frac{1}{2}.$$

Как будет выглядеть интеграл крюков  $\theta_L$  после такого преобразования? Ответ на этот вопрос дает следующая лемма (именуемая в работе [1] как *Лемма 2*).

**Лемма 2.** При преобразовании диаграммы  $\Lambda$ , осуществляемом формулами (4.2), соответствующий ей интеграл крюков  $\theta_{F_\Lambda}$  переходит в интеграл  $\tilde{\theta}_{L_\Lambda}$  следующего вида

$$\tilde{\theta}_{L_\Lambda} = 1 + 2 \iint_{t < s} \log 2(s - t) \cdot (1 - L'_\Lambda(s)) (1 + L'_\Lambda(t)) ds dt. \quad (4.3)$$

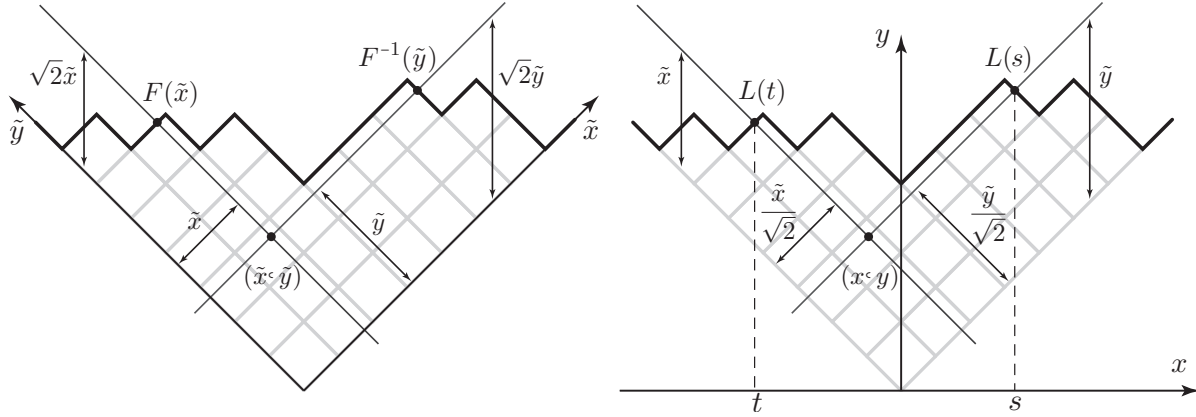


Рис. 4.2: Соотношения в различных системах координат до и после преобразования

**Доказательство.** Как видно из Рисунка 4.2 в новой системе координат уравнение прямых, проходящих через произвольную точку с угловыми коэффициентами  $\pm 1$  будут иметь вид:

$$y = \tilde{x} - x \quad \text{и} \quad y = \tilde{y} + x,$$

где  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  — координаты этой точки в старой системе координат. Обозначив абсциссы пересечения первой и второй прямых с графиком  $L(x)$  через  $t$  и  $s$ , получим:

$$L(t) = \tilde{x} - t \quad \text{и} \quad L(s) = \tilde{y} + s$$

или

$$\tilde{x} = L(t) + t \quad \text{и} \quad \tilde{y} = L(s) - s, \tag{4.4}$$

имеющие смысл только при  $t < s$ . Именно этой заменой мы и воспользуемся. Учитывая то, что Якобиан такой замены равен

$$-(L'(t) + 1)(L'(s) - 1) = (1 - L'(s))(1 + L'(t)),$$

все что осталось сделать для доказательства леммы, это показать что

$$h(\tilde{x}, \tilde{y}) = 2(s - t). \tag{4.5}$$

Для этого, используя нашу замену (4.4), перепишем формулу длины крюка (2.3):

$$h(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(L(t) + t) - L(s) + s + F^{-1}(L(s) - s) - L(t) - t. \tag{4.6}$$

Сначала проверим что обе функции (4.5) и (4.6) совпадают в точке  $(s_0, t_0)$ , координаты которой соответствуют "краям" диаграммы (см. Рисунок 4.3). Так как в этих точках

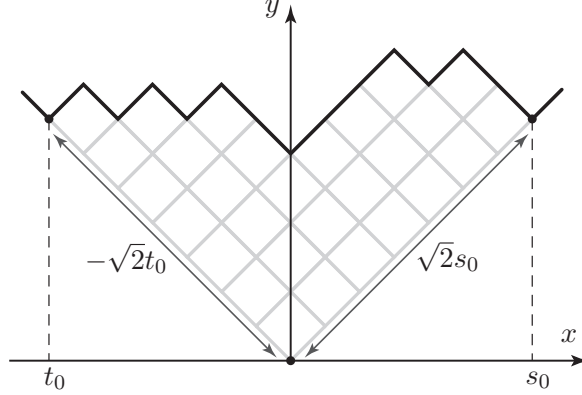


Рис. 4.3: Соотношения в различных системах координат до и после преобразования

$L(s_0) = s_0$  и  $L(t_0) = -t_0$ , из (4.4) следует, что этим значениям  $s, t$  в старой системе координат соответствует точка  $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (0, 0)$ , то есть "угол" диаграммы. Длина же крюка для этой точки очевидно равна

$$h(0, 0) = F(0) + F^{-1}(0),$$

то есть сумме сторон диаграммы. Из того же рисунка видно, что в новой системе координат длина стороны  $F^{-1}(0) = \sqrt{2}s_0$ , а другой  $F(0) = \sqrt{2}t_0$ . Помня то, что при переходе к старой системе координат все длины увеличиваются в  $\sqrt{2}$  раз, мы как раз приходим к значению  $2(s_0 - t_0)$ .

Аналогичным образом можно показать, что функции совпадают для значений  $s, t$  соответствующим точкам, лежащим на границе клеток. Для всех остальных значений, функция длины крюка непрерывно дифференцируема. Поэтому для проверки совпадения функций достаточно проверить равенство их производных. Вычисляя частные производные (4.6), имеем:

$$h'_s = -L'(s) + 1 + \frac{1}{F'}(L'(s) - 1);$$

$$h'_t = F'(L'(t) + 1) - L'(t) - 1.$$

Учитывая тот очевидный факт, что  $L'(s) = -1$  и  $L'(t) = 1$  для всех  $s, t$  для которых формула длины крюка имеет смысл, окончательно получаем

$$h'_s = 2 \quad h'_t = 2,$$

что в точности соответствует значениям частных производных (4.5). Лемма доказана.

## Глава 5

# Экстремаль интеграла крюков

Найденное новое выражение (4.3) для интеграла крюков  $\tilde{\theta}_L$  в предыдущей главе, вообще говоря, является функционалом от функции  $L_\Lambda(x)$ , соответствующей диаграмме  $\Lambda$ . Если существует предельная форма диаграммы, то стоит полагать, что она будет являться экстремалью этого функционала. Как будет видно из дальнейших рассуждений, предельная форма диаграмм будет определяться функцией, доставляющей функционалу  $\theta$  нулевое значение. Искомая экстремаль, очевидно, должна будет удовлетворять упомянутым в предыдущей главе свойствам функции  $L(x)$ , возможно разве что за исключением требования равенства модуля производной единице.

Сформулируем задачу более точно. Будем искать такую функцию  $\Omega(x)$ , которая доставляет нулевое значение функционалу (4.3):

$$\tilde{\theta}_\Omega = 0 \tag{5.1}$$

при следующих ограничениях:

- за пределами интерьера конечного интервала  $[a, b]$  экстремаль  $\Omega(x)$  должна совпадать с функцией модуля, то есть  $\Omega(x) = |x|$ ;
- площадь области между графиками функций  $\Omega(x)$  и  $|x|$  должна быть равна площади нормированной сжатой диаграммы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Omega(x) - |x|) dx = \frac{1}{2}; \tag{5.2}$$

- $\Omega(x) \geq |x|$  для любого значения аргумента  $x$ .

Последнее свойство сформулировано из интуитивных соображений что график функции  $L(x)$  границы любой диаграммы не может "опускаться" ниже биссектрис первой и второй четвертей.

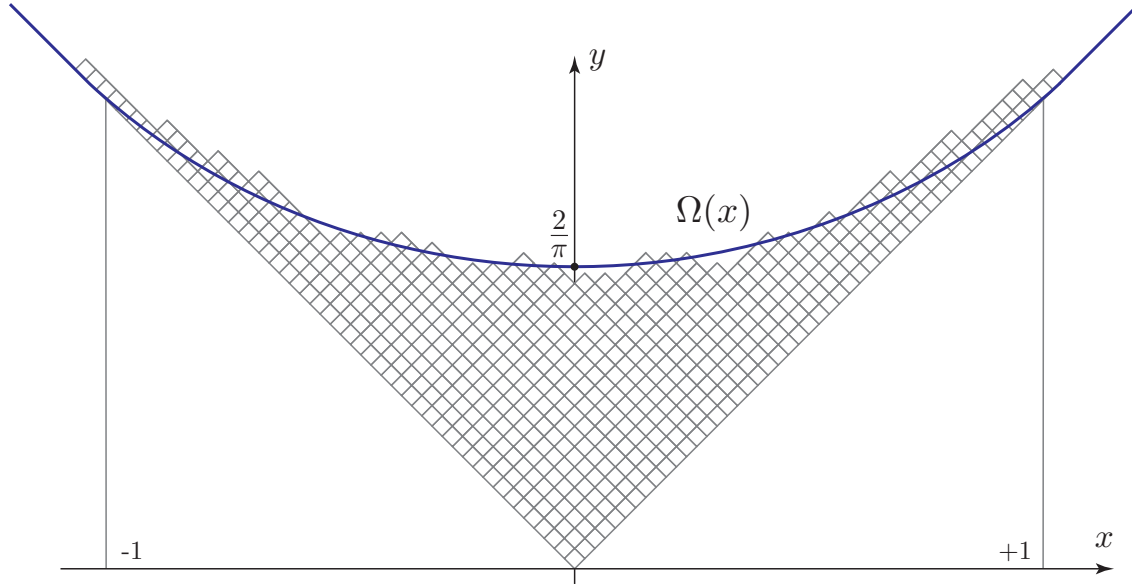


Рис. 5.1: Экстремаль  $\Omega(x)$  и граница диаграммы Юнга

Такая функция  $\Omega(x)$  была найдена А.Б. Грибовым и имеет следующий вид:

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left( x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \right), & \text{при } |x| < 1; \\ |x|, & \text{при } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (5.3)$$

На Рисунке 5.1 показан график этой экстремали. Стоит отметить четность функции  $\Omega(x)$  (хотя этого и следовало ожидать из симметрии граф диаграмм), а также непрерывность ее производной. Действительно, на интервале  $[-1; +1]$  экстремаль  $\Omega(x)$  совпадает с первообразной функции  $\frac{2}{\pi} \arcsin(x)$ , значения которой на концах этого интервала совпадают со значениями производной функции  $|x|$ .

Обсуждение вывода выражения для экстремали можно найти в работе [5]. Здесь же мы ограничимся лишь тем, что проверим то что  $\Omega(x)$  действительно удовлетворяет заявленным ограничениям а также условию (5.1).

Выполнение первого и третьего ограничений автоматически следует из самого определения (5.3). Проверим выполнение ограничения на площадь.

Подставляя в интеграл (5.2) выражение для  $\Omega(x)$ , получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Omega(x) - |x|) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left( x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \right) dx - \int_{-1}^{+1} |x| dx. \quad (5.4)$$

Первый интеграл в правой части разбивается на два интеграла, каждый из которых вычислим отдельно. Прежде всего

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} (x \arcsin x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \arcsin x d(x^2) = \\ &= \frac{x^2 \arcsin x}{\pi} \Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin^2 t dt = \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi} \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Для второго же интеграла получаем

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos 2t dt = \frac{1}{\pi} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1.$$

Наконец, очевидно что

$$\int_{-1}^{+1} |x| dx = 1.$$

Подставляя полученные значения интегралов обратно в (5.4), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Omega(x) - |x|) dx = \frac{1}{2} + 1 - 1 = \frac{1}{2},$$

в чем мы и хотели убедиться. Доказательство же равенства (5.1), в силу его нетривиальности, будет отложено до следующей главы.

Экстремаль  $\Omega(x)$  будет играть центральное место на протяжении всех последующих глав. Естественным образом возникающее подозрение, что в пределе диаграммы, обладающие наибольшим числом путей будут иметь форму, описываемую функцией  $\Omega(x)$  (см. Рисунок 5.1), еще подлежит серьезной проверке.

Прежде всего, для доказательства асимптотического стремления функции  $L(x)$  к экстремали  $\Omega(x)$  необходимо показать что  $L_\infty$ -норма отклонения стремится к нулю.

Кроме того, очевидно, что не все диаграммы будут иметь одну и ту же предельную форму. Достаточно вспомнить "крайние" диаграммы в графе путей, одна из которых будет представлять растущую строку, другая растущий столбец. В связи с этим необходимо будет выделить определенный подкласс диаграмм, для которого и будет доказываться

асимптотика. Такой класс должен обладать тем свойством, что вероятностная мера множества диаграмм, не вошедших в него, должна будет стремиться к нулю с ростом размера  $N$ .

## Глава 6

### Лемма 3

В этой главе мы докажем важную лемму, связывающую отклонение функции  $L(x)$  от найденной ранее экстремали  $\Omega(x)$  с интегралом крюков  $\tilde{\theta}_L$ . Обозначим такое отклонение как

$$f(x) = L(x) - \Omega(x).$$

**Лемма 3.** Для функции  $L(x)$ , являющейся границей диаграммы Юнга, ее интеграл крюков (4.3) может быть представлен в следующем виде:

$$\tilde{\theta}_L = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \log 2|s-t| \cdot f'(s)f'(t) ds dt + 4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arcosh}|s| ds. \quad (6.1)$$

Сразу следует отметить, что из справедливости леммы немедленно следует что  $\tilde{\theta}_\Omega = 0$ , то есть сформулированное в предыдущей главе требование (5.1) для экстремали  $\Omega(x)$  выполняется.

**Доказательство.** Зафиксируем числа  $a$  и  $b$  такие, что  $f(s) = 0$  вне интервала  $(a, b)$ . Для дальнейшего удобства обозначим:

$$\Phi_0(x) = -\log 2|x|, \quad \Phi_n(x) = \int_0^x \Phi_{n-1}(y) dy$$

для  $n = 1, 2, \dots$ , а также

$$H(x) = \begin{cases} x \operatorname{arcosh}|x| - \sqrt{x^2 - 1}, & \text{если } x \geq 1; \\ 0, & \text{если } |x| \leq 1; \\ x \operatorname{arcosh}|x| + \sqrt{x^2 - 1}, & \text{если } x \leq -1. \end{cases}$$



Сначала покажем что

$$I(s) = \int_a^b \Phi_0(s-t) \Omega'(t) dt = \Phi_1(a-s) + \Phi_1(b-s) - 2H(s). \quad (6.2)$$

Пусть  $s \in [-1, +1]$ . Тогда, предварительно умножив на  $-1$  обе части, мы можем переписать (6.2) как

$$\begin{aligned} \int_a^{-1} \log 2|s-t| dt - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^s \log 2(s-t) \arcsin(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_s^{+1} \log 2(t-s) \arcsin(t) dt - \\ - \int_{+1}^b \log 2|s-t| dt = - \int_0^{a-s} \log 2|t| dt - \int_0^{b-s} \log 2|t| dt + 0. \end{aligned}$$

Проверим что равенство выполняется при  $s = 0$ :

$$\int_a^{-1} \log 2|t| dt - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \log 2|t| \arcsin(t) dt - \int_{+1}^b \log 2|t| dt = - \int_0^a \log 2|t| dt - \int_0^b \log 2|t| dt.$$

Второй интеграл в левой части содержит нечетную функцию и поэтому равен нулю:

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \log 2|t| \arcsin(t) dt = 0.$$

С учетом этого факта, после небольшого преобразования правой части, остаемся с уравнением

$$\int_a^{-1} \log 2|t| dt - \int_{+1}^b \log 2|t| dt = \int_a^{-1} \log 2|t| dt + \int_{-1}^0 \log 2|t| dt - \int_0^{+1} \log 2|t| dt - \int_{+1}^b \log 2|t| dt$$

или

$$0 = \int_{-1}^0 \log 2|t| dt - \int_0^{+1} \log 2|t| dt,$$

что, очевидно, верно. Таким образом, обе функции слева и справа в (6.2) равны при  $s = 0$ . Показав далее равенство их производных, мы докажем что функции совпадают на всем интервале.

Дифференцирование (6.2) дает

$$\begin{aligned} \int_a^{-1} \frac{dt}{s-t} - 1 \cdot \log 0 \cdot \arcsin - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^s \frac{\arcsin t dt}{s-t} + 1 \cdot \log 0 \cdot \arcsin s + \\ + \frac{2}{\pi} \int_s^{+1} \frac{\arcsin t dt}{t-s} + \int_{+1}^b \frac{dt}{t-s} = \log 2(s-a) + \log 2(b-s) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -\log(s-t)\Big|_a^{-1} - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^s \frac{\arcsin t \, dt}{s-t} + \frac{2}{\pi} \int_s^{+1} \frac{\arcsin t \, dt}{t-s} - \log(t-s)\Big|_{+1}^b = \\ = \log 2 + \log 2 + \log(s-a) + \log(b-s) \end{aligned}$$

что упрощается до

$$-\log(s+1) + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^s \frac{\arcsin t \, dt}{s-t} + \frac{2}{\pi} \int_s^{+1} \frac{\arcsin t \, dt}{t-s} - \log(1-s) = 2 \log 2. \quad (6.3)$$

Аналогично, при  $s = 0$  получаем

$$\begin{aligned} 4 \log 2 &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^0 \frac{\arcsin t \, dt}{-t} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+1} \frac{\arcsin t \, dt}{t} \\ 4 \log 2 &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \arcsin t \, d \log |t| \\ 4 \log 2 &= \frac{2}{\pi} \arcsin t \cdot \log |t| \Big|_{-1}^{+1} - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\log |t| \, dt}{\sqrt{1-t^2}}. \end{aligned}$$

Последний интеграл может быть вычислен с использованием [4] 863.41:

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\log |t| \, dt}{\sqrt{1-t^2}} = \log 2.$$

Таким образом, мы получаем тождество

$$4 \log 2 = \log 2 + \log 2 + 2 \log 2$$

и следующим шагом опять же проверим совпадение производных (6.3):

$$\begin{aligned} \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{1-s} + \left( -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\arcsin t \, dt}{s-t} \right)' &= 0 \\ \frac{-1}{s+1} + \frac{-1}{s-1} + \left( \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \arcsin t \, dt \log(s-t) \right)' &= 0 \\ \frac{-1}{s+1} + \frac{-1}{s-1} + \left( \frac{2}{\pi} \arcsin t \cdot \log(s-t) \Big|_{-1}^{+1} - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\log(s-t) \, dt}{\sqrt{1-t^2}} \right)' &= 0 \\ \frac{-1}{s+1} + \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{(s-t)\sqrt{1-t^2}} &= 0, \end{aligned}$$

где первые четыре слагаемых сокращаются, а известный интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{(s-t)\sqrt{1-t^2}} = \begin{cases} \pm \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}, & \text{если } |s| > 1; \\ 0, & \text{если } |s| \leq 1 \end{cases} \quad (6.4)$$

дает ожидаемое тождество. Аналогичные рассуждения показывают что (6.2) также имеет место и для случая когда  $s \in (a, -1)$  и  $t \in (1, b)$ .

Завершающим шагом доказательства покажем что

$$\int_a^b I(s) \Omega'(s) ds = 1 - 2\Phi_2(b-a) - 4 \int_a^b H(s) \Omega'(s) ds. \quad (6.5)$$

Будем рассматривать левую и правую части (6.5) как функции одной переменной  $b$ . Интеграл (см. [4] 863.41,42)

$$\int_{-1}^{+1} \Phi_2(s) \Omega''(s) ds = \frac{1}{2}$$

показывает что левая и правая части равны при  $b = 0$ . Дальнейшее дифференцирование покажет, что они совпадают на всем интервале. Дифференцирование правой части (6.5) и использование очевидного факта что

$$(\Phi_2(b-a))' = \left( \int_0^{b-a} \Phi_1(t) dt \right)' = \Phi_1(b-a)$$

дает

$$-2\Phi_1(b-a) - 4H(b) \Omega'(b).$$

Повторное дифференцирование и использование еще одного очевидного тождества

$$(\Phi_1(b-a))' = \left( - \int_0^{b-a} \log 2t dt \right)' = -\log 2(b-a)$$

дает

$$2\log 2(b-a) - 4H'(b) \Omega'(b) - 4H'(b) \Omega''(b).$$

Легко увидеть, что  $4H'(b) \Omega''(b)$  — тождественный ноль. К сожалению, нам нужно прибегнуть к дифференцированию еще один (третий!) раз чтобы получить

$$\frac{2}{b-a} - 4H''(b) \Omega'(b) - 4H'(b) \Omega''(b).$$

Снова, выбрасывая  $4H'(b) \Omega''(x)$ , остаемся с

$$\frac{2}{b-a} - 4H''(b) \Omega'(b). \quad (6.6)$$

Немного сложнее оказывается дифференцирование левой части (6.5). Взятие первой производной и использование очевидного тождества

$$(\Phi_1(b-s))' = \left( - \int_0^{b-s} \log 2t dt \right)' = -\log 2(b-s)$$

дает

$$\Phi_1(a-b) \Omega'(b) + \Phi_1(0) \Omega'(b) - \int_a^b \log 2(b-s) \Omega'(s) ds - 2H(b) \Omega'(b),$$

где второе слагаемое обращается в ноль поскольку  $\Phi_1(0) = 0$ . Повторное дифференцирование с использованием тождества

$$(\Phi_1(a-b))' = \left( - \int_0^{a-b} \log |t| dt \right)' = \log 2(b-a)$$

дает

$$\log 2(b-a) \Omega'(b) + \Phi_1(a-b) \Omega''(b) - \log 2(b-b) \Omega'(b) - \int_a^b \frac{\Omega'(s) ds}{b-s} - 2H'(b) \Omega'(b) - 2H(b) \Omega''(b).$$

Здесь второе и последнее слагаемые равны нулю так как  $\Omega''(b) = 0$ . После взятия интеграла по частям получаем

$$\begin{aligned} \log 2(b-a) \Omega'(b) - \log 2(b-b) \Omega'(b) + \log(b-b) \Omega'(b) - \\ - \log(b-a) \Omega'(a) - \int_a^b \log(b-s) \Omega''(s) ds - 2H'(b) \Omega'(b) \end{aligned}$$

или

$$\log 2(b-a) \Omega'(b) - \log 2 - \log(b-a) \Omega'(a) - \int_{-1}^{+1} \frac{\log(b-s) ds}{\sqrt{1-s^2}} - 2H'(b) \Omega'(b).$$

Наконец, третье дифференцирование дает

$$\frac{\Omega'(b)}{b-a} - \log(b-a) \Omega''(b) - \frac{\Omega'(a)}{b-a} - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{ds}{(b-s)\sqrt{1-s^2}} - 2H''(b) \Omega'(b) - 2H'(b) \Omega''(b),$$

где второе и последнее слагаемые равны нулю. Так как  $\Omega'(a) = -1$ , а  $\Omega'(b) = +1$ , последнее выражение может быть переписано как

$$\frac{2}{b-a} - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{ds}{(b-s)\sqrt{1-s^2}} - 2H''(b) \Omega'(b)$$

в то время как (6.4) помогает распознать здесь

$$\frac{2}{b-a} - 4H''(b) \Omega'(b)$$

тем самым доказывая равенство (6.5).

Теперь можно вернуться к (4.3) и раскрыть скобки.

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_L &= 1 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\log 2(s-t)) (1 - L'_\Lambda(s)) (1 + L'_\Lambda(t)) ds dt = \\ &= 1 + 2 \int_a^b \int_t^b (\log 2(s-t)) ds dt - 2 \int_a^b \int_t^b (\log 2(s-t)) L'(s) ds dt + \\ &\quad + 2 \int_a^b \int_t^b (\log 2(s-t)) L'(t) ds dt - 2 \int_a^b \int_t^b (\log 2(s-t)) L'(s) L'(t) ds dt = \\ &= 1 + \int_a^b \int_a^b (\log 2|s-t|) ds dt - 2 \int_a^b \int_a^s (\log 2(s-t)) L'(s) dt ds + \\ &\quad + 2 \int_a^b \int_t^b (\log 2(s-t)) L'(t) ds dt - \int_a^b \int_a^b (\log 2|s-t|) L'(s) L'(t) ds dt \end{aligned}$$

что, учитывая тождества

$$2 \int_a^b \int_t^b (\log 2(s-t)) ds dt = \int_a^b \int_a^b (\log 2|s-t|) ds dt$$

и

$$\int_a^b \int_t^b ds dt = \int_a^b \int_a^s dt ds = - \int_a^b \int_s^a dt ds$$

может быть записано как

$$\begin{aligned} 1 - \int_a^b \int_a^b \Phi_0(s-t) ds dt + 2 \int_a^b \int_s^a (\log 2|t-s|) L'(s) dt ds + \\ + 2 \int_a^b \int_t^b (\log 2|s-t|) L'(t) ds dt - \int_a^b \int_a^b (\log 2|s-t|) L'(s) L'(t) ds dt = \\ 1 - \int_a^b \int_a^b \Phi_0(s-t) ds dt + 2 \int_a^b \int_0^{a-s} (\log 2|u|) L'(s) du ds + \\ + 2 \int_a^b \int_0^{b-t} (\log 2|u|) L'(t) du dt + \int_a^b \int_a^b (\Phi_0(s-t)) L'(s) L'(t) ds dt \end{aligned}$$

окончательно упрощаясь до

$$1 - \int_a^b \int_a^b \Phi_0(s-t) ds dt - 2 \int_a^b \Phi_1(a-s) L'(s) ds - \\ - 2 \int_a^b \Phi_1(b-t) L'(t) dt + \int_a^b \int_a^b (\Phi_0(s-t)) L'(s) L'(t) ds dt.$$

С другой стороны, (6.1) может быть записано как

$$\tilde{\theta}_{L\Lambda} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \log 2|s-t| \cdot f'(s) f'(t) ds dt + 4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arcosh}|s| ds = \\ = - \int_a^b I(s) \Omega'(s) ds - 2 \int_a^b I(s) L'(s) ds + \int_a^b \int_a^b \Phi_0(s-t) L'(s) L'(t) ds dt + \\ + 4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arcosh}|s| ds.$$

Применение здесь уже полученных выражений (6.2) и (6.5) дает

$$1 - 2\Phi_2(b-a) - 4 \int_a^b H(s) \Omega'(s) ds - \\ - 2 \int_a^b \Phi_1(a-s) L'(s) ds - 2 \int_a^b \Phi_1(b-s) L'(s) ds + 4 \int_a^b H(s) L'(s) ds + \\ + \int_a^b \int_a^b \Phi_0(s-t) L'(s) L'(t) ds dt + 4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arcosh}|s| ds.$$

Последний взгляд на очевидное тождество

$$-4 \int_a^b H(s) \Omega'(s) ds + \int_a^b H(s) L'(s) ds = 4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arcosh}|s| ds$$

успешно завершает доказательство.

## Глава 7

# Связь с соболевской нормой

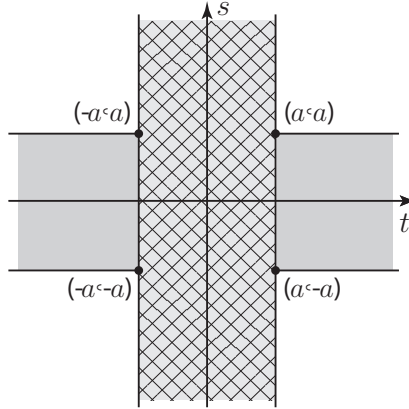
В предыдущей главе мы смогли доказать важную формулу, выражающую интеграл крюков  $\tilde{\theta}_L$  функции  $L_\Lambda(x)$ , соответствующей произвольной диаграмме  $\Lambda$ , через ее отклонение  $f(x)$  от найденной ранее экстремали  $\Omega(x)$ . Оказывается, что квадратичная часть такого представления крюков с точностью до константы ( $= 1/2$ ) есть ни что иное, как соболевская норма отклонения  $f(x)$ .

**Лемма 3.** Для любой кусочно непрерывно дифференцируемой функции  $f(x)$  с ограниченным носителем выполнено равенство

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \log 2|s-t| \cdot f'(s)f'(t) ds dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{f(s)-f(t)}{s-t} \right)^2 ds dt. \quad (7.1)$$

**Доказательство.** Будем считать, что носитель функции  $f(x)$  является подмножеством отрезка  $[-a, +a]$ . Разобьем  $\mathbb{R}^2$  на три области, как показано ниже и перепишем интеграл в правой части (7.1):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{f(s)-f(t)}{s-t} \right)^2 ds dt = \\ & = \int_{-a}^{+a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{f(s)-f(t)}{s-t} \right)^2 ds dt + \int_{+a}^{+\infty} \int_{-a}^{+a} \left( \frac{f(s)-f(t)}{s-t} \right)^2 ds dt + \int_{-\infty}^{-a} \int_{-a}^{+a} \left( \frac{f(s)-f(t)}{s-t} \right)^2 ds dt. \end{aligned} \quad (7.2)$$



Рассмотрим первое слагаемое в правой части (7.2):

$$\int_{-a}^{+a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = \int_{-a}^{+a} \int_{-\infty}^{+t} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt + \int_{-a}^{+a} \int_t^{+\infty} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt$$

Каждый из двух интегралов в правой части проинтегрируем по частям. Это законно в силу того предположения что  $f(x)$  кусочно непрерывно дифференцируема:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+t} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds &= \int_{-\infty}^{+t} (f(s) - f(t))^2 d \left( \frac{1}{s - t} \right) = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f(s) - f(t))^2}{s - t} \Big|_{s=-\infty}^{s=t-\varepsilon} + 2 \int_{-\infty}^t \frac{(f(s) - f(t)) f'(s)}{s - t} ds = \\ &= 2 \int_{-\infty}^t \frac{(f(s) - f(t)) f'(s)}{s - t} ds, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем фактом что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(f(t - \varepsilon) - f(t))^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f'(t))^2 \cdot \varepsilon = 0$$

в силу существования левой производной  $f(x)$ . Аналогично, для второго интеграла получаем

$$\int_t^{+\infty} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds = \int_t^{+\infty} \frac{(f(s) - f(t)) f'(s)}{s - t} ds.$$



Тогда, учитывая что  $f'(x) = 0$  вне интервала  $[-a, +a]$ , имеем:

$$\int_{-a}^{+a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \frac{(f(s) - f(t)) f'(s)}{s - t} ds dt. \quad (7.3)$$

В силу того что здесь интегрирование ведется по прямоугольной области, мы можем поменять порядок интегрирования и еще раз воспользоваться интегрированием по частям

$$\begin{aligned} 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \frac{(f(s) - f(t)) f'(s)}{s - t} ds dt &= \\ &= -2 \int_{-a}^{+a} (f(s) - f(t)) f'(s) \log |s - t| \Big|_{t=-a}^{t=+a} ds - 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} f'(s) f'(t) \log |s - t| dt ds = \\ &= 2 \int_{-a}^{+a} f(s) f'(s) \log \frac{a + s}{a - s} ds - 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} f'(s) f'(t) \log |s - t| dt ds. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Рассматривая второе слагаемое в (7.2), имеем:

$$\begin{aligned} \int_{+a}^{+\infty} \int_{-a}^{+a} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt &= \int_{-a}^{+a} \int_{+a}^{+\infty} \left( \frac{f(s)}{s - t} \right)^2 dt ds = \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(s)}{a - s} ds = \\ &= -f^2(s) \log(a - s) \Big|_{s=-a}^{s=+a} + 2 \int_{-a}^{+a} f(s) f'(s) \log(a - s) ds = \\ &= 2 \int_{-a}^{+a} f(s) f'(s) \log(a - s) ds. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Аналогично, для третьего слагаемого в (7.2) получаем

$$\int_{-\infty}^{-a} \int_{-a}^{+a} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = -2 \int_{-a}^{+a} f(s) f'(s) \log(a + s) ds. \quad (7.6)$$

Сопоставляя (7.2)-(7.6), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = -2 \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} f'(s) f'(t) \log |s - t| ds dt. \quad (7.7)$$

Очевидно, в силу ограниченности носителя  $f(x)$ , в интеграле справа конечные пределы могут быть заменены бесконечными. Наконец, нехватка множителя 2 под логарифмом в правой части (7.7) компенсируется тем фактом что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(s) f'(t) \log 2 |s-t| ds dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(s) f'(t) \log 2 ds dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(s) f'(t) \log |s-t| ds dt,$$

где

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(s) f'(t) \log 2 ds dt = \log 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f'(s) ds \right) f'(t) dt = 0$$

в силу того что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(s) ds = \lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) - \lim_{s \rightarrow -\infty} f(s) = 0 - 0 = 0.$$

Лемма доказана.

## Глава 8

# Существенные диаграммы Юнга

Так как предельная форма определяется видом диаграмм с наибольшим числом ведущих в них путей, с помощью заданной вероятностной меры мы бы хотели ввести критерий, позволяющий для заданного размера  $N$  отделять такие диаграммы от остальных. Безусловно, диаграммы с максимально возможным числом путей будут входить в предполагаемых класс, но не только они.

Вспоминая (см., например (2.1)) что фактически интегралом крюков мы аппроксимируем не саму вероятностную меру а ее логарифм

$$-\frac{\log \mu(\lambda_N)}{N} \sim \tilde{\theta},$$

можно прийти к выводу, что, так как вероятностная мера диаграмм сильно отклоняющихся от предельной формы должна становиться ничтожно малой, то значения соответствующих им интегралов крюков  $\tilde{\theta}$  должны неограниченно возрастать. Напротив, для предполагаемого класса асимптотически стабильных диаграмм, соответствующие интегралы крюков должны быть ограничены сверху (очевидно, снизу они ограничены нулем). Указанием этого граничного значения и будет введен критерий такого класса диаграмм Юнга. А именно, назовем диаграмму Юнга  $\Lambda$  размера  $N$  *существенной*, если ее интеграл крюков

$$\tilde{\theta} < \frac{2\pi}{\sqrt{6N}}.$$

Такой непростой вид для верхней границы обуславливается формулой Харди-Рамануджана и полезность именно этой границы будет оправдана нижеследующей леммой. Множество же всех существенных диаграмм размера  $N$  далее будем обозначать как  $M_N$ :

$$M_N = \left\{ \Lambda \mid \tilde{\theta}_\Lambda < \frac{2\pi}{\sqrt{6N}} \right\}.$$

**Лемма 3.**

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(M_N) = 1,$$

то есть относительно меры Планшереля класс существенных диаграмм становится подавляющим с ростом  $N$ .

**Доказательство.** Обозначим как  $p(N)$  — общее количество диаграмм размера  $N$ , то есть число всех возможных разложений числа  $N$ . Тогда по формуле Харди-Рамануджана:

$$p(N) \sim \frac{1}{4N\sqrt{3}} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}}. \quad (8.1)$$

Доказательство этой хорошо известной в теории представлений формулы можно найти, например, в работе [6]. Учитывая полученное ранее представление (2.1) вероятностной меры через интегральную сумму, а также связь последней с интегралами крюков (Леммы 1-3), имеем:

$$\log \mu(\Lambda) = -N \cdot \tilde{\theta}_\Lambda - \sum_{\square \in \Lambda} c(h(\square)) + \log \sqrt{2\pi N} + o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (8.2)$$

Вспоминая ряд (3.2) для  $c(x)$ , легко увидеть что при достаточно больших значениях  $N$  разность

$$\log \sqrt{2\pi N} - \sum_{\square \in \Lambda} c(h(\square))$$

будет отрицательной. Поэтому в (8.2) можно смело ограничить  $\log \mu(\Lambda)$  сверху интегралом крюков:

$$\log \mu(\Lambda) \leq -N \cdot \tilde{\theta}_\Lambda,$$

экспоненцируя

$$\mu(\Lambda) \leq e^{N \cdot \tilde{\theta}}.$$

Рассмотрим диаграмму  $\Lambda$  размера  $N$ , не являющуюся существенной, то есть диаграмму, которая лежит в дополнении  $\bar{M}_N$ . Тогда для такой диаграммы

$$\mu(\Lambda) \leq e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}},$$

а с учетом формулы Харди-Рамануджана (8.1), мера всего множества  $\bar{M}_N$

$$\mu(\bar{M}_N) \leq p(N) \cdot e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}} = \frac{1}{4N\sqrt{3}} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}} \cdot e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}}$$

$$\mu(\bar{M}_N) \leq \frac{1}{4N\sqrt{3}}$$

является бесконечно малой величиной при  $N \rightarrow \infty$ . Так как этот факт эквивалентен утверждению леммы, доказательство завершено.

## Глава 9

# Основная теорема

В настоящей главе мы готовы сформулировать и доказать основную теорему о предельной форме диаграмм Юнга.

**Теорема (Вершик, Керов, 1985).** Если диаграмма  $\Lambda_N$  — существенная, то

$$\sup_x |L_{\Lambda_N}(x) - \Omega(x)| < C \cdot N^{-\frac{1}{6}}, \quad (9.1)$$

где  $C$  — константа.

**Доказательство.** Как и ранее, отклонение функции  $L(s)$  от экстремали  $\Omega(x)$  будем обозначать через  $f(x)$ , то есть  $f(x) = L(x) - \Omega(x)$ . Зафиксируем такое  $a > 0$ , чтобы носитель  $f(x)$  полностью лежал в интервале  $[-a, +a]$ , то есть  $f(x) = 0$  вне этого интервала. Действительно, это всегда можно сделать, поскольку всякая диаграмма Юнга имеет конечные размеры и соответствующая ей функция для достаточно больших значений аргумента будет совпадать с модулем  $|x|$ .

Преобразуем соболевскую норму для нашего отклонения следующим образом:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\theta}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{-a} + \int_{-a}^{+a} + \int_{+a}^{+\infty} \right) \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{f^2(t)}{s - t} \Big|_{s=-\infty}^{s=-a} + \int_{-a}^{+a} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds - \frac{f^2(t)}{s - t} \Big|_{s=+a}^{s=+\infty} \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{f^2(t)}{a + t} + \frac{f^2(t)}{a - t} + \int_{-a}^{+a} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds \right] dt = \end{aligned}$$

$$= 2a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-a}^{+a} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt =$$

поменяв порядок интегрирования во втором интеграле и продолжая аналогичные рассуждения относительно переменной  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} &= 2a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt + \int_{-a}^{+a} \left( \int_{-\infty}^{-a} + \int_{-a}^{+a} + \int_{+a}^{+\infty} \right) \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 dt ds = \\ &= 2a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt + \int_{-a}^{+a} \left[ \frac{f^2(t)}{s - t} \Big|_{t=-\infty}^{t=-a} + \int_{-a}^{+a} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 dt + \frac{f^2(t)}{s - t} \Big|_{t=+a}^{t=+\infty} \right] ds = \\ &= 2a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt + \int_{-a}^{+a} \left[ \frac{f^2(s)}{a + s} + \frac{f^2(s)}{a - s} + \int_{-a}^{+a} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 dt \right] ds = \\ &= 2a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt + 2a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(s)}{a^2 - s^2} ds + \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt. \end{aligned}$$

То есть мы пришли к тому что

$$\|f\|_{\theta}^2 = 4a \int_{-a}^{+a} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt + \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \left( \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt. \quad (9.2)$$

Но первый интеграл в правой части есть ни что иное как квадрат  $L^2$ -нормы!

$$\left\| \frac{f(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^2(t)}{a^2 - t^2} dt$$

Тогда, учитывая что двойной интеграл в (9.2) неотрицателен и то что рассматриваемая диаграмма Юнга — существенная, получаем что

$$\left\| \frac{f(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right\|_2^2 \leq \frac{1}{4a} \|f\|_{\theta}^2 < \frac{1}{4a} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{6N}},$$

откуда немедленно следует

$$\|f\|_2^2 < \frac{\pi a}{2\sqrt{6N}}. \quad (9.3)$$

Анализируя выражение для экстремали (5.3) легко убедиться что ее производная ограничена:  $\Omega'(x) \leq 1$ . Также, учитывая "зубчатый" вид функции  $L(x)$ , очевидно что  $|L'(x)| \leq 1$ . Таким образом, производная отклонения будет также ограниченной функцией:

$$|f'(x)'| = |L'(x) - \Omega'(x)| \leq 1 + 1 = 2.$$

Тогда если наибольшее значение  $|f(x)|$  достигается в точке  $x_0$  и равно  $M$ , то в силу непрерывности  $f(x)$  и компактности ее носителя:

$$|f(x)| \geq M - 2|x - x_0|,$$

причем для всех  $x$ . Мы же проинтегрируем квадрат этого неравенства на интервале  $[x_0, x_0 + \frac{M}{2}]$ :

$$\int_{x_0}^{x_0 + \frac{M}{2}} f^2(x) dx \geq \int_0^{\frac{M}{2}} (M - 2u)^2 du = \left[ M^2u - 2Mu^2 + \frac{4}{3}u^3 \right] \Big|_0^{\frac{M}{2}} = \frac{M^3}{6}.$$

Так как  $M$  и есть значение искомой  $L_\infty$ -нормы, то с учетом (9.3) получаем

$$\|f\|_\infty^3 = M^3 \leq 6 \int_{x_0}^{x_0 + \frac{M}{2}} f^2(x) dx \leq 6 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx = 6\|f\|_2^2$$

$$\|f\|_\infty^3 \leq 6\|f\|_2^2 < \frac{3\pi a}{\sqrt{6N}}$$

$$\|f\|_\infty < \sqrt[3]{\sqrt{\frac{3}{2}}\pi a} \cdot \frac{1}{N^{\frac{1}{6}}}$$

$$\|f\|_\infty < C \cdot N^{-\frac{1}{6}}.$$

Теорема доказана.

## Глава 10

# Оценка длины первой строки

Одной из ключевых возможностей, открываемых основной теоремой, является возможность получения оценок на длины строк для произвольных диаграмм  $\lambda$ . В этой главе мы найдем одну из оценок для длины первой строки. Кроме того, для ее получения сначала потребуется показать, что мера Планшереля является марковской мерой.

**Лемма.** Пусть диаграмма  $\lambda$  имеет размер  $N$ . Тогда

$$\sum_{\lambda_{+1}} \dim \lambda_{+1} = (N + 1) \dim \lambda,$$

где суммирование ведется по всем диаграммам, полученным из  $\lambda$  добавлением одной клетки.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{Y}$  — множество всевозможных диаграмм Юнга (произвольной длины). Рассмотрим линейное пространство  $L_2(\mathcal{Y})$ , состоящее из всевозможных конечных линейных комбинаций диаграмм Юнга. Для произвольных  $\lambda', \lambda'' \in \mathcal{Y}$  введем скалярное произведение по формуле

$$\langle \lambda', \lambda'' \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda' = \lambda''; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

то есть базис, составленный из диаграмм, является ортогональным. Также введем линейные операторы  $U$  и  $D$ , определенные на элементах базиса следующим образом:

$$U\lambda = \sum_{\lambda_{+1}} \lambda_{+1}, \quad D\lambda = \sum_{\lambda_{-1}} \lambda_{-1},$$

где, опять же,  $\lambda_{+1}$  означает суммирование по всем диаграммам, полученным из  $\lambda$  добавлением одной клетки, а  $\lambda_{-1}$  означает суммирование по всем диаграммам, полученным удалением одной клетки.



Во-первых, отметим что операторы  $U$  и  $D$  — сопряженные. Действительно, для любых  $\lambda', \lambda'' \in \mathcal{Y}$  имеет место

$$\langle D\lambda', \lambda'' \rangle = \langle \lambda', U\lambda'' \rangle.$$

В этом легко убедиться, проверив это свойство на элементах базиса.

Во-вторых, справедливо следующее равенство

$$UD - DU = I, \tag{10.1}$$

где  $I$  — тождественное преобразование. Справедливость этого равенства следует из того, что получить произвольную диаграмму из самой себя путем добавления сначала одной клетки, а затем удаления одной клетки, можно столькими способами, сколько локальных максимумов у графика этой диаграммы. Получить же диаграмму саму из себя путем сначала удаления одной клетки, а затем добавления, можно столькими способами, сколько локальных минимумов у графика соответствующей трансформированной диаграммы  $\Lambda$ . Но в действительности, для любой диаграммы  $\Lambda$  число локальных максимумов всегда на единицу больше числа локальных минимумов (см. Рисунок 10.1)!

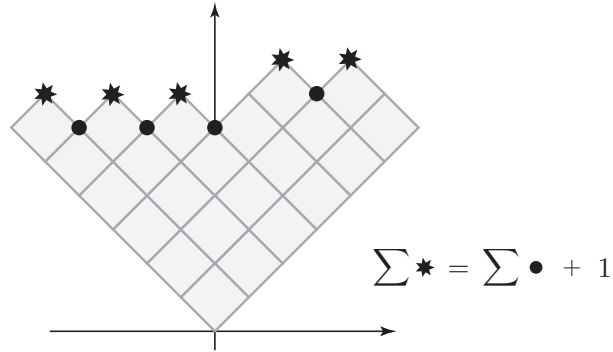


Рис. 10.1: Соотношение числа локальных минимумов и максимумов

В-третьих, несложно заметить, что если диаграмма  $\lambda$  имеет размер  $N$ , то

$$\dim \lambda = \langle D^N \lambda_0, \lambda \rangle = \langle \lambda_0, U^N \lambda \rangle, \tag{10.2}$$

где за  $\lambda_0$  будем условно считать диаграмму без клеток.

Используя (10.1) и (10.2), получаем что

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_{+1}} \dim \lambda_{+1} &= \langle D^{N+1} \lambda_0, \sum_{\lambda_{+1}} \lambda_{+1} \rangle = \langle D^{N+1} \lambda_0, D\lambda \rangle = \langle UD^{N+1} \lambda_0, \lambda \rangle = \\ &= \langle D^N \lambda_0, \lambda \rangle + \langle DUD^N \lambda_0, \lambda \rangle = 2\langle D^N \lambda_0, \lambda \rangle + \langle D^2UD^{N-1} \lambda_0, \lambda \rangle = \end{aligned}$$

$$\dots$$

$$= (N + 1)\langle D^N \lambda_0, \lambda \rangle + \langle D^{N+1} U \lambda_0, \lambda \rangle = (N + 1) \dim \lambda,$$

где в последнем равенстве был использован тот факт что  $U \lambda_0 = 0$ . Лемма доказана.

Введем на множестве диаграмм  $\mathcal{Y}$  набор переходных вероятностей

$$p(\lambda', \lambda'') = \begin{cases} \frac{\dim \lambda''}{|\lambda''| \dim \lambda'}, & \text{если } \lambda'' = \lambda'_{+1}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из только что доказанной леммы следует что

$$\sum_{\lambda_{+1}} p(\lambda, \lambda_{+1}) = 1,$$

поэтому семейство  $p(\lambda', \lambda'')$  задает марковскую меру.

**Лемма.** Семейство переходных вероятностей  $p(\lambda', \lambda'')$  порождает меру Планшереля, то есть для любой диаграммы  $\lambda$ , состоящей из  $N + 1$  клеток, выполняется

$$\mu^{(N+1)}(\lambda) = \sum_{\lambda_{-1}} \mu^{(N)}(\lambda_{-1}) \cdot p(\lambda_{-1}, \lambda).$$

**Доказательство.**

$$\sum_{\lambda_{-1}} \mu^{(N)}(\lambda_{-1}) \cdot p(\lambda_{-1}, \lambda) = \sum_{\lambda_{-1}} \frac{\dim \lambda_{-1} \cdot \dim \lambda}{(n + 1)!} = \frac{(\dim \lambda)^2}{(n + 1)!} = \mu^{(N+1)}(\lambda).$$

**Лемма.** Для любого натурального  $N$  выполнено неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} < 2\sqrt{N}.$$

**Доказательство.** Докажем по интуиции. При  $N = 1$  неравенство выполняется. Предположим, что неравенство выполнено для  $n$  и докажем из этого его выполнимость для  $n + 1$ . Имеем,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2 < \left(2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2 = \\ & = 4n + \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} + \frac{1}{n+1} \leq 4n + 4 \left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{n+1} \leq 4(n+1). \end{aligned}$$

Откуда и следует утверждение леммы.

**Теорема.** Пусть  $\mathcal{Y}_N$  обозначает множество диаграмм Юнга размера  $N$ , а  $\mu^{(N)}(\lambda)$  меру Планшереля на  $\mathcal{Y}_N$ . Если за  $r_1(\lambda)$  обозначить длину первой строки диаграммы  $\lambda$ , то

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_N} r_1(\lambda) \cdot \mu^N(\lambda) < 2\sqrt{N}.$$

**Доказательство.** Пусть  $X = \{X_N\}$  — марковская цепь с фазовым пространством  $\mathcal{Y}$ , переходными вероятностями  $p(\lambda', \lambda'')$  и начальным состоянием  $X_1$ , соответствующим диаграмме Юнга, состоящей из одной клетки. Фактически, нам нужно доказать что

$$\mathbb{E}r_1(X_N) < 2\sqrt{N}.$$

Пусть  $p_k$  — вероятность того, что  $X_k$  получается из  $X_{k-1}$  добавлением клетки к первой строке. Тогда

$$\mathbb{E}r_1(X_N) = 1 + p_2 + p_3 + \dots + p_N.$$

Ясно что

$$p_k = \sum_{|\lambda|=k-1} \mu^{(k-1)}(\lambda) \cdot p(\lambda, \tilde{\lambda}),$$

где  $\tilde{\lambda}$  обозначает диаграмму, полученную из  $\lambda$  добавлением клетки в первой строке. Тогда

$$p_k^2 \leq \sum_{|\lambda|=k-1} \left( \mu^{(k-1)}(\lambda) \right)^2 p(\lambda, \tilde{\lambda})^2 \leq \sum_{|\lambda|=k-1} \mu^{(k-1)}(\lambda) p(\lambda, \tilde{\lambda})^2 = \sum_{|\lambda|=k-1} \frac{\mu^{(k)}(\tilde{\lambda})}{k} < \frac{1}{k},$$

где в первом случае было использовано неравенство Коши-Буняковского, во втором свойство  $\mu^{(k-1)}(\lambda) \leq 1$ , в третьем тот факт что

$$p^2(\lambda, \tilde{\lambda}) = \frac{\mu^{(k)}(\tilde{\lambda})}{k \cdot \mu^{(k-1)}(\lambda)},$$

и в последнем то, что множество всех диаграмм  $\tilde{\lambda}$ , получающихся из всех диаграмм размера  $N$  путем добавления клетки в первую строку, содержит не все диаграммы из  $N+1$  клетки, а поэтому его мера строго меньше 1.

Таким образом, получаем что  $p_k < 1/\sqrt{k}$ , а поэтому, согласно последней лемме,

$$\mathbb{E}r_1(X_N) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} < 2\sqrt{N}.$$

Теорема доказана.

# Литература

- [1] А.М. Вершик, С.В. Керов, *Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы*. Функциональный анализ и его приложения, 1985, выпуск 1, том 19, с. 25-36.
- [2] Здесь должна быть ссылка на доказательство формулы крюков, которое мы рассматривали.
- [3] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. 4-е изд. - М.: Физматгиз, 1963. - 1100 с.
- [4] Г.Б. Двайт, *Таблицы интегралов и другие математические формулы*. - М.: Наука, 1973. - 228 с.
- [5] А.Б. Грибов, *Предельная форма относительно меры Планшереля таблицы Юнга*. Вестн. ЛГУ, сер. математика, №1, 1985.
- [6] Luis Baez-Duarte, *Hardy-Ramanujans Asymptotic Formula for Partitions and the Central Limit Theorem*. Advances in Mathematics, Volume 125, Issue 1, 1997, pp. 114-120.
- [7] Alexei Borodin, Andrei Okounkov, Grigori Olshanski *Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups*. Journal of American Mathematical Society, Volume 13, Issue 3, 2000, pp. 481-515.
- [8] William Fulton, *Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry* Cambridge University Press, 1996. - 272 с.