Теория инвариантов. Листок 3

Р. Федоров с удовольствием обсудит задачи как этого, так и предыдущих листков с участниками. Особенно важны последние пять задач.

Задача 1. Пусть $G \subset O(n, \mathbb{R})$ — группа, порожденная отражениями, причем $H_1, \ldots, H_N$ — соответствующие гиперплоскости, $g \in G$.
(а) Докажите, что g переводит множество $\{H_1, \ldots, H_N\}$ в себя. То есть, для любого i найдется такое j, что $gH_i = H_j$. (Указание: если s — отражение относительно H, $h \in GL(n)$, то $h^{-1}sh$ — отражение относительно…)
(б) Докажите, что если C — камера Вейля, то gC — тоже камера Вейля.
(в) Если C, C' — камеры Вейля, то найдется такой $g \in G$, что $gC = C'$. (Указание: соедините C и C' ломаной, не проходящей через точки пересечения гиперплоскостей).
(г) Пусть $H_1, \ldots, H_k$ — все гиперплоскости, имеющие хотя бы одну внутреннюю точку с замыканием фиксированной камеры Вейля C. Докажите, что соответствующие отражения порождают группу G.
(д) Докажите, что граф Дынкина–Кокстера не зависит от выбора камеры Вейля.

Задача 2. Вычислите графы Дынкина–Кокстера групп BC_n, D_n и H_3.

Задача e**.** Выведите из теоремы Гильберта о нулях следующий факт: пусть даны многочлены $f, g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Пусть f обращается в ноль в любой точке $x \in \mathbb{C}^n$, в которой обращаются в ноль многочлены $g_1, \ldots, g_m$. Тогда найдутся такие многочлены $h_1, \ldots, h_m$, что $f = h_1 g_1 + \ldots + h_m g_m$.

Задача 3. (а) Пусть O — горизонтальная окружность радиуса 1 в $\mathbb{R}^3$ с центром в начале координат. Докажите, что

$$I(O) = (x^2 + y^2 - 1, z).$$

(Указание: любой многочлен можно записать в виде $zP + Q(x, y)$.)
(б) Докажите, что идеал $(x^2 + y^2 - 1, z)$ радикален.

Задача 4. Пусть $\operatorname{rad} \mathfrak{a}_1 = \operatorname{rad} \mathfrak{a}_2$. Докажите, что $L(\mathfrak{a}_1) = L(\mathfrak{a}_2)$.

Задача 5. Пусть $\mathfrak{a}$ идеал в кольце A. Докажите, что этот идеал радикален тогда и только тогда, когда $A/\mathfrak{a}$ не содержит нильпотентов.

Задача 6. Даны многочлены $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.
(а) Постройте отображение $\phi : \mathbb{C}[y, \ldots, y_m] \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.
(б) Постройте отображение $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.
(в) Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$, $Y \subset \mathbb{C}^m$ — алгебраические множества. Докажите, что $F(X) \subset Y$ тогда и только тогда когда, когда $\phi(I(Y)) \subset I(X)$.