Коды и их связь с решётками — лекция 4

Предварительная версия от 28 июля 2010 г.

В. А. Клепцын

Определение 1. *Тета-функцией* четной решеткой называется ряд

$$\theta_\Gamma(q) = \sum_{v\in\Gamma} q^{\langle v,\, v\rangle/2}. \qquad (1)$$

Задача 1. Ряд (1) сходится при $|q| < 1$.

Подставим в (1) $q = e^{2\pi i\tau}$, где $\tau \in \Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$:

Определение 2. $\tilde{\theta}_\Gamma(\tau) = \theta(e^{2\pi i\tau})$.

Очевидно, что так полученная функция $\tilde{\theta}_\Gamma\colon \Pi_+ \to \mathbb{C}$ 1-периодична. Оказывается, что для самодвойственной решетки Γ функция $\tilde{\theta}$ удовлетворяет еще одному соотношению — в каком-то смысле аналогичному ранее выведенной инвариантности для перечисляющих многочленов самодвойственных кодов.

А именно, есть такая замечательная формула, *формула Пуассона*:

$$\sum_{v\in\mathbb{Z}^n} = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(p),$$

где $\hat{f}(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle p,\, x\rangle} f(x)\, dx$ — преобразование Фурье. Для «хорошей» функции[1] f мы получаем ее «разложение по частотам» вида $e^{2\pi i\langle p,\, x\rangle}$:

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(p)\cdot e^{2\pi i\langle p,\, x\rangle} dp.$$

Несложно видеть, как меняется преобразование Фурье при линейных заменах координат: для функции $g(x) = f(Ax)$ имеем:

$$\hat{g} = \frac{1}{\det A}\hat{f}((A^*)^{-1}(p)).$$

Задача 2. Докажите это.

[1] А мы будем работать только с такими.

Применим задачу 2, получив формулу Пуассона для суммирования по произвольной решетке:

Задача 3. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — решетка. Тогда

$$\sum_{v\in\Gamma} f(v) = \frac{1}{\operatorname{covol}(\Gamma)} \sum_{p\in\Gamma^*} \hat{f}(p).$$

Указание. Представьте $\Gamma = A\mathbb{Z}^n$ для некоторого линейного преобразования A и вспомните, что $\Gamma^* = (A^*)^{-1}\Gamma$.

Одним из замечательных фактов теории вероятностей является то, что преобразование Фурье функции $\varphi(x) = e^{-\pi\langle x,\, x\rangle}$ — это опять эта же функция: $\tilde{\varphi}(p) = e^{-\pi\langle p,\, p\rangle}$.

Задача 4. Выведите отсюда, что для $\varphi_\alpha(x) = e^{-\pi\langle x,\, x\rangle}$

$$\widehat{\varphi_\alpha}(p) = \frac{1}{(\sqrt{\alpha})^n} e^{-\pi\langle p,\, p\rangle/\alpha},$$

где n — размерность пространства.

Применим это к исследованию тета-функции. Заметим, что

$$\tilde{\theta}_\Gamma(\tau) = \sum_{v\in\Gamma} e^{2\pi i\tau\langle v,\, v\rangle/2} = \sum_{v\in\Gamma} e^{\pi i\tau\langle v,\, v\rangle}.$$

Пусть сначала τ — чисто мнимое: $\tau = i\alpha$.

Задача 5. Применив все изложенное, докажите, что

$$\tilde{\theta}_\Gamma(i\alpha) = \frac{1}{(\sqrt{\alpha})^n} \tilde{\theta}_{\Gamma^*}(i/\alpha). \tag{2}$$

Формулу (2) можно переписать как

$$\tilde{\theta}_\Gamma(\tau) = \frac{1}{(\sqrt{\tau/i})^n} \tilde{\theta}_{\Gamma^*}(-1/\tau). \tag{3}$$

На самом деле, функции в левой и правой частях равенства (3) достаточно «хорошие» (а именно, комплексно-аналитические: они разлагаются в сходящиеся степенные ряды), чтобы из его справедливости на мнимой оси следовала его справедливость во всей области определения — верхней полуплоскости.

Тем самым, если Γ — четная самодвойственная решетка, то

$$\tilde{\theta}_\Gamma(\tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^{n/2} \tilde{\theta}_\Gamma\left(-\frac{1}{\tau}\right).$$