Задачи к занятию 1

Задача 1. Пусть $N(O,R)$ — количество точек плоскости с целочисленными координатами, лежащих внутри круга радиуса R с центром в точке O. Докажите, что справедливо следующее равенство:

$$\lim_{R\to\infty}\frac{N(O,R)}{R^2}=\pi.$$

Задача 2. а) Докажите, что для каждого натурального n существует круг с центром в точке с координатами $(\sqrt{2},\frac{1}{2})$, который содержит внутри себя ровно n узлов решётки $\mathbb{Z}^2$.
б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для решётки $\mathbb{Z}^3$.

Задача 3. Докажите, что для любого чётного n существует окружность с центром в точке $(\frac{1}{3},0)$, которая проходит ровно через n узлов решётки $\mathbb{Z}^2$.

Задача 4. Пусть $(x-x_0)^2+y^2=R^2$ — окружность, проходящая ровно через n узлов решётки $\mathbb{Z}^2$. Докажите, что на сфере $(x-x_0)^2+y^2+(z-\sqrt{2})=R^2+2$ лежат ровно n узлов решётки $\mathbb{Z}^3$.

Задача 5. Докажите следующие утверждения.
а) Существуют окружности на плоскости, которые проходят ровно через одну точку с рациональными кооодинатами.
б) Существуют окружности на плоскости, которые проходят ровно через две точки с рациональными кооодинатами.
в) Если окружность с центром в точке $(0,0)$ содержит хотя бы одну точку с рациональными координатами, то на ней лежит бесконечно много точек плоскости с рациональными координатами.
г) Если хотя бы одна из координат центра окружности иррациональна, то на самой окружности лежит не более двух точек плоскости с рациональными координатами.

Задача 6. Докажите, что для каждого натурального n существует окружность, проходящая ровно через n узлов а) паркета типа (6)3, б) паркета типа (3)6.

Задача 7. Докажите, что на решётке $\mathbb{Z}^2$ можно расположить выпуклый равносторонний многоугольник с любым чётным числом сторон.

Задача 8. Докажите следующие утверждения.
а) При всех натуральных n, за исключением случаев $n=1,2,3,4,6,12$, число $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ не может быть представлено в виде $q\sqrt{3}$, где $q\in\mathbb{Q}$.
б) При всех натуральных n, за исключением случаев $n=1,2,4,8,16$, число $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ не может быть представлено в виде $p+q\sqrt{2}$, где $p,q\in\mathbb{Q}$.
в) При всех натуральных n, за исключением случаев $n=1,2,3,4,6,8,12,24$, число $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ не может быть представлено в виде $p+q\sqrt{3}$, где $p,q\in\mathbb{Q}$.

Задача 9. Для каждого типа паркета найдете все $n\in\mathbb{N}$, при которых а) равносторонний б) равноугольный n-угольник можно расположить на данном паркете.

Задача 10. Докажите, что плоский правильный n-угольник можно расположить на решётке $\mathbb{Z}^3$ тогда и только тогда, когда $n=3$, $n=4$ или $n=6$.

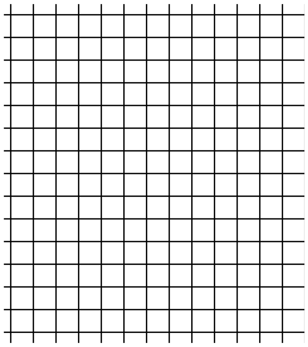
Открытые проблемы

Задача 11. Опишите множество всех окружностей, проходящих ровно через n точек решётки $\mathbb{Z}^2$.

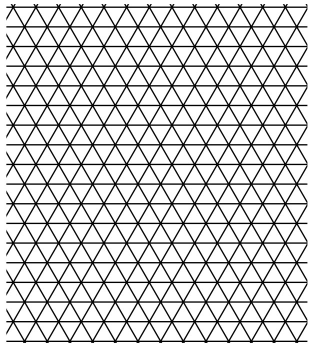
Задача 12. Какие полуправильные многоугольники можно расположить на плоскости так, чтобы все их вершины имели координаты из $\mathbb{Q}(\alpha)$ (здесь $\mathbb{Q}(\alpha)$ — простое алгебраическое расширение поля рациональных чисел, полученное присоединением алгебраического числа α)?

Задача 13. Для каких натуральных n на решётке $\mathbb{Z}^3$ можно расположить замкнутую ломаную из n звеньев одинаковой длины?

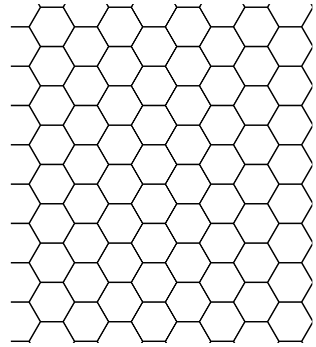
Задача 14. Для каких натуральных n на решётке $\mathbb{Z}^3$ можно расположить замкнутую равноугольную ломаную из n звеньев?



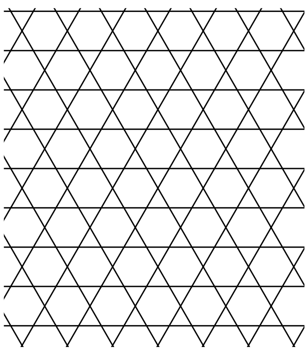
(4)4



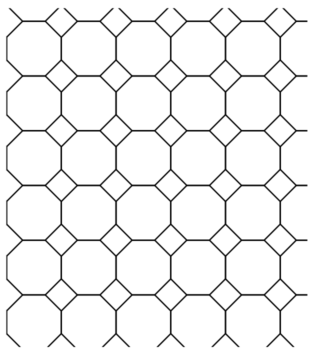
(6)3



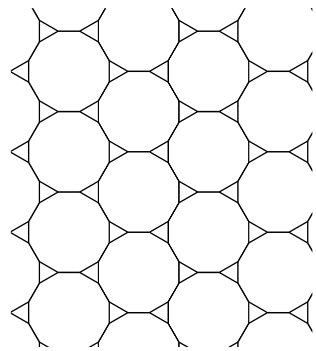
(3)6



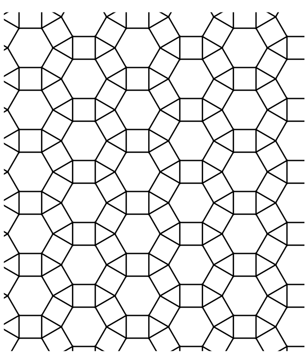
3, 6, 3, 6



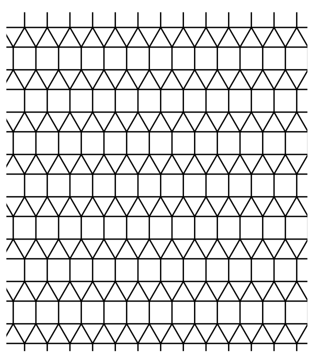
4, 8, 8



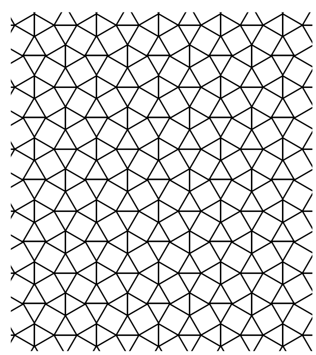
3, 12, 12



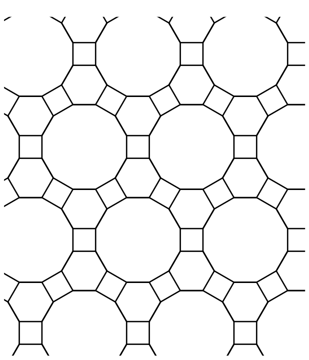
3, 4, 6, 4



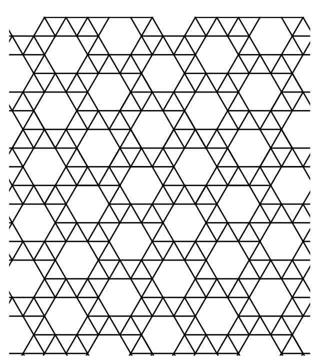
(3)3, (2)4



(2)3, 4, 3, 4



4, 6, 12



(4)3, 6