ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

А. Скопенков

Векторные поля на подмножествах плоскости

Векторным полем на подмножестве плоскости называется семейство векторов $v(x)$ на плоскости в точках x данного подмножества, непрерывно зависящих от точки x.

Векторное поле называется *единичным*, если все его векторы единичные.

1. Постройте единичное векторное поле на плоскости. (Оно будет единичным векторным полем на произвольном подмножестве плоскости.)

Два единичных векторных поля называются *гомотопными*, если одно можно получить из другого непрерывной деформацией, в процессе которой векторное поле остается единичным. Формально, такой деформацией называется семейство v_t единичных векторных полей, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0,1]$, для которого v_0 есть первое поле и v_1 есть второе поле.

2. (a) Любое единичное векторное поле v на плоскости гомотопно полю $-v$.

(b) Приведите пример негомотопных единичных векторных полей на некотором подмножестве плоскости.

3. Любые два единичных векторных поля на N гомотопны, если

(a) $N = 0 \times [0,1]$;

(b) $N = D^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$;

(c) N — произвольное дерево на плоскости.

Обозначим через $V(N)$ множество единичных векторных полей с точностью до гомотопности на подмножестве N плоскости.

4. Опишите $V(N)$ для

(a) $N = S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

(b) $N = K_4$ (граф тетраэдра);

(c) произвольного плоского графа N.

Здесь 'описать' означает построить 'естественное' взаимно-однозначное соответствие между $V(N)$ и некоторым 'известным' множеством. 'Известность' множества означает как минимум описание количества его элементов, а как максимум — наличие 'естественных' операций на множестве и на $V(N)$, сохраняемых соответствием.

5. Любые два единичных векторных поля на диске D^2, совпадающие на его граничной окружности, гомотопны *неподвижно на границе* S^1 (т.е. гомотопны так, что $v_t(x) = v_0(x)$ для любых $x \in S^1$ и $t \in [0,1]$).

Векторные поля на поверхностях

Стандартным тором T^2 в трехмерном пространстве называется фигура, образованная вращением окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$ вокруг оси Oy.

Касательным векторным полем на торе T^2 называется семейство касательных к нему векторов $v(x) \in T_x$ в его точках x, непрерывно зависящих от точки x.

Будем называть единичное касательное векторное поле просто *полем.*

1. (a) Приведите пример поля на торе T^2.

(b) Любое поле v на на торе T^2 гомотопно полю $-v$.

(c) Приведите пример двух негомотопных полей на торе T^2.

(d)* Опишите $V(T^2)$.

Понятие *единичного касательного векторного поля* на рассматриваемых ниже поверхностях вводится дословно аналогично случаю тора. Будем называть единичное касательное векторное поле просто *полем.*

Понятие *гомотопности* полей на рассматриваемых ниже поверхностях вводится дословно аналогично случаю плоскости. Обозначим через $V(N)$ множество полей на поверхности N с точностью до гомотопности (в классе полей).

Листом Мебиуса M называется поверхность в $\mathbb{R}^3$, заметаемая стержнем, равномерно вращающимся относительно своего центра, при равномерном движении этого центра по окружности, при котором стержень делает пол-оборота.

2. (a) Постройте поле v на листе Мебиуса M.
(b) Гомотопно ли построенное Вами поле v полю $-v$?
(c) Опишите $V(M)$.

3. Опишите $V(N)$ для
(a) верхней полусферы $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge 0\}$;
(b) кольца $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2\le 2\}$;
(c) боковой поверхности цилиндра $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1\}$;
(d) тора с дыркой;
(e)* бутылки Клейна K (определение спросите).

4. Если на торе с дыркой заданы два поля, то их сужения на граничную окружность этой дырки гомотопны.

Рассмотрим стандартную сферу S^2 в трехмерном пространстве, т.е. подмножество точек (x,y,z), для которых $x^2+y^2+z^2=1$ (или, что то же самое, точек (x,y,z) вида $(\cos\varphi\cos\psi, \sin\varphi\cos\psi, \sin\psi)$).

5.* (a) Не существует единичного касательного векторного поля на сфере S^2. (Доказательство можно найти в книгах В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович, Наглядная топология, §14, или В. В. Прасолов, Наглядная топология, §7 или Д.В. Аносов, Отображения окружности, векторные поля и их применения.)
(b) То же для кренделя (определение спросите).
(c) То же для проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ (определение спросите).
(d) Тождественное отображение сферы S^2 не гомотопно антиподальному.

6.* (a) На любом трехмерном многообразии (определение спросите) существует единичное касательное векторное поле.
(b) $V(S^3)\cong\mathbb{Z}$ (умножение на $V(S^3)$ задается умножением кватернионов).
(c) Опишите $V(S^1\times S^2)$, $V(T^3)$.

Нормальные векторные поля

Единичным нормальным векторным полем к окружности $S^1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ z=0\}$ в трехмерном пространстве называется семейство нормальных к ней единичных векторов $v(x)$ в точках x окружности, непрерывно зависящих от точки x. Будем называть единичное нормальное векторное поле просто *нормальным полем*. Понятие *гомотопности* нормальных полей вводится дословно аналогично случаю полей.

1. (a) Постройте нормальное поле.
(b) Постройте другое (т.е. не гомотопное уже построенному) нормальное поле.
(c) Опишите нормальные поля с точностью до гомотопности.
(d)* Опишите нормальные поля с точностью до гомотопности для *заузленной* гладкой окружности в $\mathbb{R}^3$ (определение спросите).

Неформально, *гладким вложением* $f: S^2\to\mathbb{R}^m$ сферы называется изображение сферы в $\mathbb{R}^m$ без самопересечений, для которого в любой точке существует касательная плоскость. (Формально, отображение $f: S^2\to\mathbb{R}^m$ называется *гладким вложением*, если оно инъективно и якобиан $df(x)$ невырожден для любой точки $x\in S^2$.)

Единичным нормальным векторным полем на $f(S^2)$ называется семейство нормальных к $f(S^2)$ векторов $v(x)$ в точках $f(x) \in f(S^2)$, непрерывно зависящих от точки $x \in S^2$. Будем называть единичное нормальное векторное поле просто *нормальным полем.* Аналогично определяются гладкие вложения и нормальные поля для тора, бутылки Клейна, диска и т.д.

2. (a) Любое вложение тора в $\mathbb{R}^3$ имеет нормальное поле.

(b) Никакое вложение листа Мебиуса в $\mathbb{R}^3$ не имеет нормального поля.

3. Постройте гладкие вложения в $\mathbb{R}^4$

(a) листа Мебиуса M;

(b) бутылки Кляйна K;

(c)* проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ (определение спросите).

4. Постройте нормальные поля для Ваших вложений листа Мебиуса и бутылки Кляйна в $\mathbb{R}^4$.

5. (a) Если гладкое вложение $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ имеет нормальное поле, то оно имеет пару линейно-независимых нормальных полей.

(b) То же для тора.

(c) Верно ли то же для бутылки Клейна?

Понятие *гомотопности* нормальных полей вводится дословно аналогично случаю касательных полей.

6. Опишите нормальные поля с точностью гомотопности на

(a) сфере в $\mathbb{R}^4$; (b) торе в $\mathbb{R}^4$; (c) листе Мебиуса в $\mathbb{R}^4$; (d) бутылке Кляйна в $\mathbb{R}^4$.

Примечание: ответ может зависеть от гладкого вложения в $\mathbb{R}^4$.

7. (a) Любое гладкое вложение диска в $\mathbb{R}^4$ имеет нормальное поле.

(b) То же для тора с дыркой.

(c) Верно ли то же для листа Мебиуса?

8. Любое гладкое вложение тора, бутылки Клейна (или даже проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$) в $\mathbb{R}^5$ имеет нормальное поле.

9. Опишите нормальные поля с точностью гомотопности на

(a) сфере в $\mathbb{R}^5$; (b) торе в $\mathbb{R}^5$; (c) листе Мебиуса в $\mathbb{R}^5$; (d) бутылке Кляйна в $\mathbb{R}^5$.

Примечание: ответ может зависеть от гладкого вложения в $\mathbb{R}^5$.

10.* (a) Любое гладкое вложение сферы в $\mathbb{R}^4$ имеет нормальное поле.

(b) То же для тора.

(c) Никакое гладкое вложение $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ не имеет нормального поля.

(d) Существует гладкое вложение $f : K \to \mathbb{R}^4$, не имеющее нормального поля.

Указания

I-2b. Например, постоянное поле и поле $v(x, y) = (y, -x)$. При непрерывной деформации траектории единичного векторного поля сохраняются. Или см. указание к 4a.

I-4a. По векторному полю v на окружности зададим число $\deg v$ формулой

$$degv := \int_0^1 dv(t) := \lim_{\max(t_{k+1}-t_k)\to 0} \{\sum_{k=1}^{n} (v(t_k) - v(t_{k-1})) \mid 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1\},$$

где $v(t)$ — точка единичной окружности, но $v(t_k) - v(t_{k-1})$ — вещественное число для малых $t_k - t_{k-1}$. Иными словами, возьмем $n > 0$, для которого $|v(x) - v(y)| < 0.1$ при $x - y < 1/n$ и положим

$$degv := \sum_{k=1}^{n} (v(\frac{k}{n}) - v(\frac{k-1}{n})).$$