



Детерминированный хаос

2. Типы особых точек и аттрактор Лоренца

Задачи

- Найдите типы особых точек для следующих векторных полей.
 - $\dot{x} = y, \dot{y} = \sin x$;
 - $\dot{x} = x - y^2, \dot{y} = -y + x^2$.
- Нарисуйте эскиз фазового портрета для векторного поля $\dot{x} = x, \dot{y} = 2y$.
- Рассмотрим фазовый портрет, получившийся в первой задаче предыдущего листка для одного холма. Под каким углом пересекаются сепаратрисы этого седла?
Подсказка: вблизи положения равновесия желоб можно заменить на параболический. Почему? Какую параболу нужно взять?
- Нарисуйте эскиз фазового портрета для векторного поля

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

- Рассмотрим систему уравнений Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x); \quad \dot{y} = x(\rho - z) - y; \quad \dot{z} = xy - \beta z,$$

где $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$.

- Найдите особые точки этого векторного поля.
 - Найдите линейную часть поля вблизи каждой из особых точек.
 - Определите типы особых точек уравнения Лоренца.
- Нарисуйте эскиз фазового портрета седлоузла: $\dot{x} = x^2, \dot{y} = -y$.

Словарик

Фазовый портрет векторного поля — это разбиение фазового пространства на траектории.

Точка, в которой векторное поле обращается в ноль, называется *особой*. С точки зрения физики такие точки соответствуют положениям равновесия.

Устойчивая (неустойчивая) сепаратриса седла на плоскости — траектория, стремящаяся к седловой особой точке в будущем (в прошлом). В многомерном случае *устойчивое (неустойчивое) многообразие* гиперболической особой точки — это множество всех точек, чьи траектории стремятся к этой особой точке в будущем (соотв., в прошлом).