Детерминированный хаос

Занятие 3: кодирование и подкова Смейла

Отображение удвоения окружности $\varphi \mapsto 2\varphi$.

1. Вася взял точку x на окружности и применяет к ней отображение удвоения окружности. После каждого применения Вася записывает, в какую из половин окружности попала точка. Если точка попала в первую половину, Вася пишет 0, если во вторую — 1. Какая последовательность получится у Васи?
2. Любая ли последовательность нулей и единиц может получиться у Васи?
3. Найдите множество периодических точек удвоения окружности.
4. Какова вероятность того, что наугад взятая точка никогда не попадет в дугу (α,β)?
5. Докажите, что на окружности существует точка, образы которой попадают во все дуги на окружности.
6. (Для тех, кто знаком с теорией вероятностей) Какова вероятность того, что наугад взятая точка будет обладать этим свойством?

Подкова Смейла

Мысленно разделим квадрат на 5 вертикальных и на 5 горизонтальных равных полос. Пусть отображение F определено на второй и четвертой вертикальной полосе. Эти полосы линейно сжимаются по вертикали и растягиваются по горизонтали, переходя во вторую и четвертую горизонтальные полосы. Такое отображение называется *отображением подковы*.

7. Найдите неподвижные точки отображения подковы.
8. Вася взял точку (x,y) в прямоугольнике и применяет к ней отображение подковы F. После каждого применения Вася записывает, в какой из прямоугольников попала точка. Если точка попала во второй сверху прямоугольник, Вася пишет 0, если в четвертый — 1. Какая последовательность получится у Васи? А если Вася будет применять отображение F^{-1}?

   Подсказка: посмотрите на пятеричную запись координат точки.
9. Выпишите, как меняется пятеричная запись абсциссы и ординаты точки при отображении подковы.
10. Какой вид должны иметь пятеричные записи абсциссы и ординаты точки, чтобы все образы точки под действием подковы были определены? Все прообразы отображения подковы были определены?

Рассмотрим множество точек, для которых определены и все образы, и все прообразы отображения подковы. Это множество называется *подковой Смейла*.

11. Докажите, что подкова Смейла — это прямое произведение двух канторовских множеств.

Детерминированный хаос

12. Есть ли у отображения подковы периодические орбиты? Сколько существует периодических орбит периода n?
13. Докажите, что в подкове существует точка, образы которой попадают в любую окрестность любой другой точки подковы. Сколько существует таких точек?

Диффеоморфизм Аносова

Рассмотрим *отображение Аносова* двумерного тора : $A\colon (x,y) \mapsto (2x+y, x+y)$.

14. Покажите, что у этого отображения в нуле — седло. Найдите сепаратрисы этого седла.

    Подсказка для школьников: надо подобрать такой поворот системы координат, чтобы отображение превратилось в стандартное седло.

    Подсказка для студентов: найдите собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
15. Покажите, что сепаратрисы седла пересекаются. Сколько у них точек пересечения?
16. Представьте себе, как в этом случае будет выглядеть картинка Пуанкаре.
17. Найдите у отображения Аносова счетное число периодических орбит.
18. Выделим на торе два прямоугольника (см. рис.). Нарисуйте их образы. *Проверьте себя*: на получившемся рисунке стороны двух прямоугольников и их образов должны резать тор на 5 частей.
19. Вася взял точку на торе и применяет к ней диффеоморфизм Аносова. После каждого применения Вася записывает, в какой из пяти прямоугольников (см. задачу 4) попала точка. Любая ли последовательность может получиться у Васи? Для каких точек получатся одинаковые последовательности?
20. Теперь Вася применяет к точке не только A, но и A^{-1}. У него получается последовательность чисел, бесконечная в обе стороны: правая половина последовательности соответствует итерациям A, а левая — итерациям A^{-1}. Могут ли теперь для разных точек получиться одинаковые последовательности?

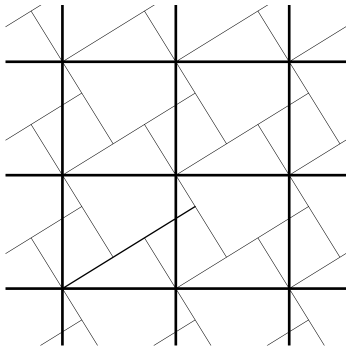

Рисунок 1 Предмарковское разбиение для диффеоморфизма Аносова