Геометрическая интерпретация дискретного преобразования Фурье

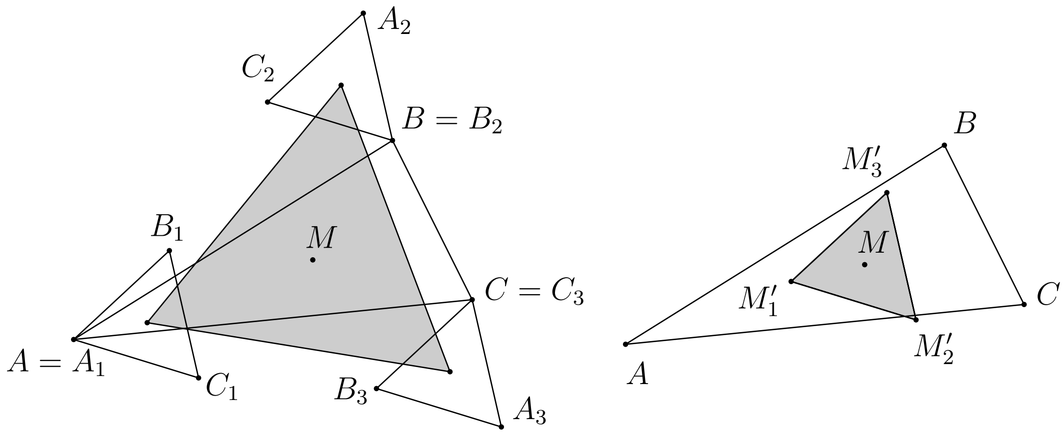
Устинов А. В.

1. В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке M. Докажите, что точки $A_1 = A$, $B_1 = R_M^{120^\circ}(B)$ и $C_1 = R_M^{240^\circ}(C)$ являются вершинами правильного треугольника $A_1B_1C_1$.

2. Пусть на плоскости расположены n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 3)$. С этими точками проделывается следующая операция: находится их центр масс M, а затем каждая точка A_k поворачивается вокруг точки M на угол $2\pi k/n$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Докажите, что если такую операцию проделать $n-1$ раз, то все n точек сольются в одну.

3. В задаче 1 получался правильный треугольник $A_1B_1C_1$. Аналогично можно построить правильные треугольники $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ равны друг другу, а их центры M_1, M_2 и M_3 также образуют правильный треугольник.

При замене углов поворотов на противоположные по знаку будет получаться еще один правильный треугольник $M_1'M_2'M_3'$. Проверьте, что он равен треугольникам $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$. (На первом рисунке треугольник $M_1M_2M_3$ закрашен.)



4. Докажите, что треугольники $M_1M_2M_3$ и $M_1'M_2'M_3'$ из задачи 3 являются решениями следующей экстремальной задачи: в плоскости треугольника ABC найти такой правильный треугольник $A'B'C'$ для которого величина

$$|M_1A|^2 + |M_2B|^2 + |M_3C|^2$$

будет минимальной. В каких случаях решением будет треугольник $M_1M_2M_3$, а в каких $M_1'M_2'M_3'$?

5. Докажите, что для треугольников $M_1M_2M_3$ и $M_1'M_2'M_3'$ достигается также минимум величины

$$\max_{\triangle M_1M_2M_3} \{|M_1A|, |M_2B|, |M_3C|\}$$

(как и в предыдущем пункте, минимум ищется по всем правильным треугольникам $M_1M_2M_3$, лежащим в плоскости треугольника ABC).