Теория КАМ для начинающих. *Ильяшенко Ю. С.*

Задачи к первой лекции

1. Докажите, что орбиты $\{F^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ иррационального поворота окружности,
$$F\colon S^1 \to S^1, \quad x \mapsto x + \alpha,$$
плотны в S^1.
2. Напомним, что $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Докажите, что $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$.
3. Докажите, что для любого ненулевого целого числа k выполнено равенство
$$\int_0^1 e^{2\pi ikx}\,dx = 0.$$
4. Докажите, что обе части равенства
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \varphi(F^i x)}{n} = \int_{S^1} \varphi(x)\,dx \tag{1}$$
линейны по функции φ.
5. Докажите, что для любого иррационального числа $\lambda \notin \mathbb{Q}$ и любого целого ненулевого числа $k \in \mathbb{Z}$, число $\nu = e^{2\pi ik\lambda}$ не равно единице.
6. Завершите доказательство того, что орбиты иррационального поворота равномерно распределены по окружности (то есть для иррационального поворота выполнено равенство (1)).
7. Пусть $F\colon S^1 \to S^1$ — отображение окружности, $\widetilde{F}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — его поднятие на прямую. Напомним, что число вращения отображения F — это предел
$$\rho(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{F}^n(x) - x}{n}.$$
Докажите, что этот предел существует и определён с точностью до прибавления целого числа.
8. Проверьте, что число вращения — это временне среднее функции $x \mapsto \widetilde{F}(x) - x$. Всегда ли оно совпадает с пространственным средним этой функции?

Задачи к второй лекции

1. Пусть члены ряда $\sum f_k e^{2\pi ikx}$ удовлетворяют неравенству $|f_{|k|}| < Cq^k$ для некоторого чиса $0 < q < 1$. Докажите, что этот ряд сходится.
2. Придумайте число λ, для которого ряд $\sum \frac{q^k}{\nu_k - 1}$, $\nu_k = e^{2\pi i\lambda k}$ расходится (более того, члены ряда неограничены) для любого q, $0 < q < 1$.
3. Докажите, что экспонента убывает быстрее, чем многочлен растёт, то есть для любых положительных чисел a и n предел $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-ax}$ равен нулю.

Теория КАМ для начинающих. *Ильяшенко Ю. С.*

В следующих задачах мы изучаем *гомологическое уравнение* на торе $\mathbb{T}^2$:

$$L_\omega f = g. \tag{2}$$

Здесь $g\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ — известная функция на торе, $\omega = (\omega_1,\omega_2)$ — известный вектор, $L_\omega f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\omega_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\omega_2$ — производная функции f вдоль вектора ω, $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ — искомая функция.

4. Докажите, что $L_\omega e^{2\pi ik\varphi} = 2\pi ik\omega e^{2\pi ik\varphi}$. Здесь $k = (k_1,k_2)$ — целочисленный вектор, $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$ — точка на двумерном торе, а произведения векторов понимаются как скалярные произведения.
5. Напомним, что вектор ω называется *резонансным*, если существует ненулевой целочисленный вектор k, такой что $k\omega = 0$. Докажите, что гомологическое уравнение (2) разрешимо в классе тригонометрических многочленов[1] тогда и только тогда, когда вектор ω не резонансный.
6. Подберите такой вектор ω, что для любой пары чисел $0<q_1,q_2<1$ ряд для решения уравнения (2) с правой частью $g = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} q_1^{|k_1|} q_2^{|k_2|} e^{2\pi ikx}$ расходится.
7. Напомним, что вектор $\omega = (\omega_1,\omega_2)$ называется *диофантовым*, если для некоторых положительных чисел C и d и любого целочисленного вектора k выполнено неравенство $|\omega k| \geqslant C|k|^d$. Пусть вектор ω диофантов, а функция g — ρ-аналитическая. Докажите, что решение f уравнения (2) — $\rho/2$-аналитическая функция.

[1] То есть для любого тригонометрического многочлена g существует тригонометрический многочлен f, удовлетворяющий уравнению.