Целочисленная геометрия и тригонометрия.

Т. Бойко, О. Карпенков*

Июль 2011

*Если у Вас будет желание досдать задачи или просто обсудить что-нибудь впоследствии пишите нам по адресу: karpenkov@tugraz.at

1 Геометрия целочисленной решётки

Определение 1.1. Пусть H — подгруппа группы G. Рассмотрим $g \in G$. Множества

$$gH = \{gh | h \in H\} \qquad \text{и} \qquad Hg = \{hg | h \in H\}$$

называются соответственно *левым* и *правым классами смежности* H в G.

Индексом подгруппы H в группе G называется число всех левых смежных классов H в G, обозначим его через $|G : H|$.

Обычно группу $\mathbb{Z}^n$ называют *решёткой*, а её подгруппы — *подрешётками.*

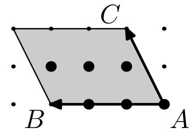
Определение 1.2. (Объекты целочисленной геометрии.) Точка (вектор) на плоскости называется *целой*, если ее координаты целые.
Отрезок *называется целочисленным*, если его концы целые. Треугольник (многоугольник, многогранник) называется *целочисленным*, если его вершины целые.
Прямая называется *целочисленной*, если она содержит как минимум две целые точки. Угол называется *целочисленным*, если его вершина целая и прямые, содержащие лучи, целые.

Определение 1.3. (Преобразования целочисленной геометрии.) Обозначим все аффинные преобразования плоскости, сохраняющие множество целых точек через $Aff(2, \mathbb{Z})$. Группа $Aff(2, \mathbb{Z})$ образована линейными преобразованиями $SL(2, \mathbb{Z})$ и параллельными переносами на целый вектор.

Задача 1. (О подсчёте индекса в подрешётке.) Индекс подрешётки в $\mathbb{Z}^2$, образованной линейно-независимыми векторами v и w, равен числу целых точек P в параллелограмме

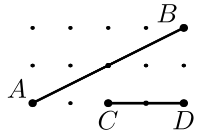
$$\{A + \alpha v + \beta w | 0 \le \alpha, \beta < 1\},$$

где A — произвольная точка.



$|G : H| = 6$

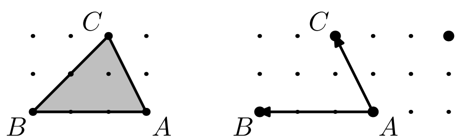
Определение 1.4. *Целочисленной длиной* целочисленного отрезка AB называется индекс подрешётки, образованной вектором AB, в решётке всех целых векторов прямой AB (обозначение $l\ell(AB)$).



$l\ell(AB) = 2, \quad l\ell(CD) = 2$

Задача 2. a). Докажите, что целочисленная длина равна количеству целых точек внутри отрезка AB плюс один.
b). Докажите, что целочисленная длина — полный инвариант относительно целочисленных аффинных преобразований $Aff(2, \mathbb{Z})$.

Определение 1.5. *Целочисленной площадью* треугольника ABC называется индекс подрешётки, образованной векторами AB и AC, во всей целочисленной решётке (обозначение $\mathrm{lS}(ABC)$).



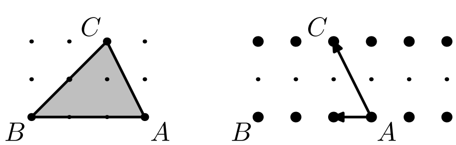
$\mathrm{lS}(ABC) = 6$

Задача 3. Для целочисленного треугольника ABC следующие условия эквивалентны:

a) ABC пуст (т.е. не содержит целых точек внутри);
b) $\mathrm{lS}(ABC) = 1$;
c) $S(ABC) = 1/2$.

Задача 4. Докажите, что целочисленная площадь треугольника равна его удвоенной Евклидовой площади.

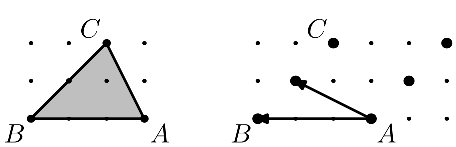
Определение 1.6. *Индексом* целочисленного угла ABC называется индекс подрешётки, порожденной всеми целыми векторами с началом и концом в объединении прямых AB и AC (обозначение $\mathrm{l}\alpha(ABC)$).



$\mathrm{l}\alpha(BAC) = 2$

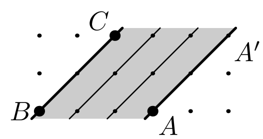
Задача 5. Докажите, что целочисленный индекс угла равен целочисленной площади треугольника, две стороны которого лежат на сторонах угла и имеют единичную целочисленную длину.

Определение 1.7. *Целочисленным расстоянием* от целочисленной точки A до целочисленной прямой BC называется индекс подрешётки порожденной векторами из точки A во все целочисленные точки прямой BC (обозначение $\mathrm{ld}(A, BC)$).



$\mathrm{ld}(A, BC) = 3$

Задача 6. (Геометрический смысл целочисленного расстояния.) Пусть $\mathrm{ld}(A, BC) = k$. Докажите, что существует ровно $k-1$ целочисленных прямых, параллельных BC, относительно которых точка A и отрезок BC расположены в разных полуплоскостях.



Задача 7. Рассмотрим три параллельные целочисленные прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 и три целые точки A_1, A_2, A_3 на соответствующих прямых. Предположим, что прямые ℓ_1 и ℓ_3 расположены в разных полуплоскостях относительно прямой ℓ_2. Докажите, что

$$\mathrm{ld}(A_1, \ell_3) = \mathrm{ld}(A_1, \ell_2) + \mathrm{ld}(A_2, \ell_3).$$

Задача 8. Докажите, что в любом треугольнике ABC выполняется тождество

$$\mathrm{lS}(ABC) = \mathrm{l}\ell(AB)\,\mathrm{ld}(C, AB).$$

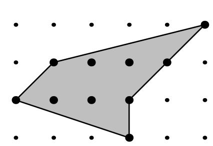
Задача 9. Верно ли, что углы ABC и CBA всегда целочисленно конгруэнтны?

Задача 10. Найдите два неконгруэнтных целочисленных треугольника одинаковой целочисленной площади. Для всякого ли значения площади это возможно?

Задача 11. (Формула Пика.) Евклидова площадь S целочисленного многогранника удовлетворяет следующему соотношению.

$$S = I + E/2 - 1,$$

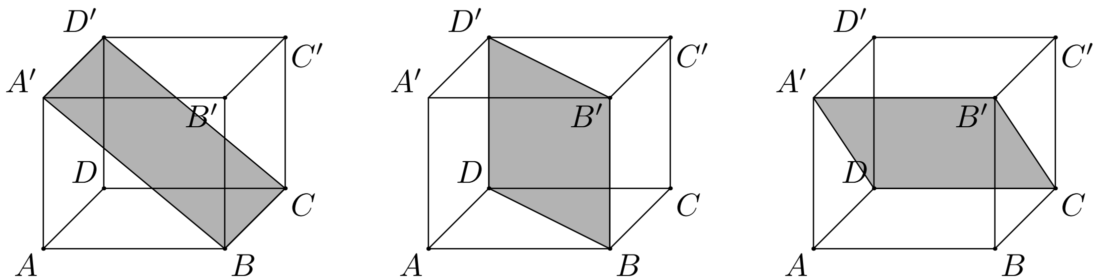
где I — число целых точек во внутренности многоугольника, а E — число целых точек на границе.



$$S = 4 + 6/2 - 1 = 6$$

Задача 12. Приведите пример пустого целого тетраэдра в $\mathbb{R}^3$, стороны которого не порождают всей целочисленной решётки. (*По сути дела это означает, что теорема Пика не обобщается дословно на многомерный случай. В настоящее время известны лишь оценочные утверждения в духе теоремы Пика.*)

Задача 13. ***(Теорема Уайта.)** Рассмотрим параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ в $\mathbb{R}^3$ с вершинами в целых точках. Пусть тетраэдр $ABDA'$ пуст, тогда все внутренние целые точки параллелепипеда расположены ровно в одном из следующих трех прямоугольников.



Задача 14. * Сформулируйте и докажите четырёхмерный аналог теоремы Уайта. (*На настоящий момент полное описание четырехмерных симплексов не известно.*)

2 Целочисленные треугольники и их тригонометрия

Задача 1. Для любого целочисленного треугольника ABC выполняется

$$\mathrm{lS}(ABC) = \mathrm{l}\ell(AB)\,\mathrm{l}\ell(AC)\,\mathrm{l}\alpha(ABC).$$

Задача 2. Какие из признаков равенства треугольников выполняются в целочисленной геометрии?

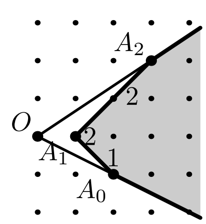
Задача 3. Докажите, что если у двух треугольников одинаковой площади все соответствующие углы целочисленно конгруэнтны, то треугольники целочисленно конгруентны. Можно ли усилить этот признак?

Определение 2.1. *Парусом* целочисленного угла называется выпуклая оболочка всех внутренних целых точек угла (исключая вершину угла).

Определение 2.2. Пусть $A_1 \ldots A_n$ — парус некоторого целочисленного угла. Обозначим

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \mathrm{l}\ell\, A_k A_{k+1}, \\ a_{2k-1} &= \mathrm{l}\alpha\, A_{k-1} A_k A_{k+1} \end{aligned}$$

для всех допустимых k. Последовательность целых чисел $(a_0, \ldots, a_{2n-2})$ называется *LLS-последовательностью* угла.



$$a_2 = \mathrm{l}\ell A_1 A_2 = 2$$

$$a_1 = \mathrm{l}\alpha A_0 A_1 A_2 = 2$$

$$a_0 = \mathrm{l}\ell A_0 A_1 = 1$$

$$LLS = (1, 2, 2)$$

Задача 4. * Докажите, что LLS-последовательность является полным инвариантом целочисленного целочисленного угла.

Определение 2.3. Рассмотрим целочисленный угол α с LLS-последовательностью $(a_0, \ldots, a_{2n-2})$. Пусть

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{2n-2}}}}},$$

причём дробь p/q — несократима. Положим по определению:

$$\mathrm{ltan}\,\alpha = \frac{p}{q}, \qquad \mathrm{lsin}\,\alpha = p, \qquad \mathrm{lcos}\,\alpha = q.$$

Пусть r – рациональное число, большее единицы. *Целочисленным арктангенсом* r называется угол образованный положительной полуосью OX и лучом $y = rx$. (Обозначение $\operatorname{larctan} r$).

Задача 5. a). Целочисленные тригонометрические функции инвариантны относительно целочисленных преобразований.
b). Для любого целочисленного угла α выполняется:

$$\operatorname{lsin}\alpha \geq \operatorname{lcos}\alpha \quad \text{и} \quad \operatorname{ltan}\alpha \geq 1.$$

Определение 2.4. Угол ABC называется *двойственным* углу CBA.
Угол называется *прямым*, если он конгруэнтен двойственному и смежному углам.

Задача 6. Постройте двойственный и смежный углы для угла $\operatorname{larctan}(7/5)$ и посчитайте их тригонометрические функции.

Задача 7. Докажите, что все целочисленные прямые углы конгруэнтны либо $\operatorname{larctan} 1$, либо $\operatorname{larctan}(2)$.

Задача 8. a). Существует ли треугольник, все углы которого конгруэнтны $\operatorname{larctan} 1$.
b). Существует ли треугольник с углами, конгруэнтными $\operatorname{larctan} 1$, $\operatorname{larctan} 2$ и $\operatorname{larctan} 3$.

Задача 9. a).* Для вещественного $s \geq 1$, выполняется: $\operatorname{ltan}(\operatorname{larctan} s) = s$.
b).* Для любого целочисленного угла α выполняется

$$\operatorname{larctan}(\operatorname{ltan}\alpha) \cong \alpha.$$

Задача 10. Докажите, что целочисленный синус совпадает с индексом угла.

Задача 11. Сформулируйте и докажите теорему синусов в целочисленной геометрии.

Задача 12. * Сформулируйте и докажите теорему косинусов в целочисленной геометрии. (*Эта задача на данный момент является нерешенной проблемой, поскольку непонятно как одновременно сочетать сложение и умножение в целочисленной геометрии*).

Задача 13. (Теорема о сумме углов в треугольнике в форме тангенсов.) Покажите, что в Евклидовой геометрии три угла α, β и γ являются углами треугольника тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \tan(\alpha+\beta+\gamma) = 0 \\ \tan(\alpha+\beta) \notin [0; \tan\alpha] \end{cases}$$

(мы предполагаем α острым).

Определение 2.5. Угол ABC называется *целочисленной суммой* углов α и β, если существует точка D внутри угла ABC такая, что угол ABD целочисленно коргруэнтен α, а DBC целочисленно конгруэнтен β.

Задача 14. Правда ли, что сумма углов в целочисленной геометрии определена однозначно?

Рассмотрим рациональные p_i $(i = 1, \ldots, k)$ и их нечётные (т.е., с нечётным числом элементов) цепные дроби $[a_{1,i} : a_{2,i}; \ldots ; a_{n_i,i}]$. Обозначим

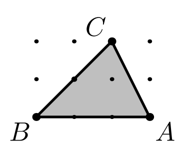
$$]p_1, \ldots, p_k[= [a_{1,1}:a_{2,1}; \ldots ;a_{n_1,1}; a_{1,2};a_{2,2}; \ldots ;a_{n_2,2}; \ldots ; a_{1,k};a_{2,k}; \ldots ;a_{n_k,k}].$$

Задача 15. Верно ли, что каждое рациональное число имеет нечётную (чётную) цепную дробь?

Теорема 2.6. (Перевод теоремы о сумме углов в треугольнике.) *Целочисленные углы α_1, α_2, α_3 (в данном порядке) являются углами целочисленного треугольника тогда и только тогда, когда существует $i \in \{1, 2, 3\}$ такое, что углы $\alpha = \alpha_i$, $\beta = \alpha_{i+1 (\mathrm{mod}\, 3)}$, $\gamma = \alpha_{i+2 (\mathrm{mod}\, 3)}$ удовлетворяют:*

$$\begin{cases}]\,\mathrm{ltan}\,\alpha, -1, \mathrm{ltan}\,\beta, -1, \mathrm{ltan}\,\gamma[= 0 \\ ]\,\mathrm{ltan}\,\alpha, -1, \mathrm{ltan}\,\beta[\notin [0, \mathrm{ltan}\,\alpha] \quad (\textit{включая бесконечное значение}) \end{cases}.$$

Задача 16. a). Проверьте справедливость Теоремы 2.6 для следующего треугольника:



b).* Докажите Теорему 2.6 в общем случае.

Задача 17. Докажите, что для любого натурального числа n существует лишь конечное число попарно неконгруэнтных треугольников целочисленной площади n. Найдите все треугольники целочисленной площади не более 6.

Задача 18. a). Пусть $\mathrm{ltan}(ABC) = 7/5$; $\mathrm{l}\ell(AB) = 3$; $\mathrm{l}\ell(BC) = 5$. Найдите остальные углы и стороны треугольника.
b).* Пусть $\mathrm{ltan}(ABC) = \alpha$; $\mathrm{l}\ell(AB) = b$; $\mathrm{l}\ell(BC) = c$. Найдите остальные углы и стороны треугольника.