Алгоритмы распознавания реализуемости гиперграфов

А. Скопенков

Хорошо известно, что существует быстрый (точнее – линейный) алгоритм, определяющий, вложим ли данный граф в плоскость, т.е., можно ли граф расположить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались и не самопересекались. Мы рассмотрим данную задачу для гиперграфов в пространствах произвольной размерности: как распознать вложимость n-мерного гиперграфа в m-мерное пространство? Теория гиперграфов — раздел математики, возникший на стыке комбинаторики, топологии и программирования, бурно развивающийся в последнее время. Будет намечено доказательство того, что при $6 < 2m < 3n + 3$ указанная проблема распознавания вложимости является NP-трудной (Matousek et al, http://arxiv.org/abs/math/0807.0336). Таким образом, скорее всего, быстрых алгоритмов для ее решения не существует. Для доказательства будет показано, как некоторая заведомо NP-трудная проблема о булевских функциях сводится к проблеме распознавания вложимости.

Все 'нешкольные' определения (гиперграф, вложимость, NP-трудность) будут даны. Основные идеи будут представлены на 'олимпиадных' примерах: размерности не выше 3, на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. Занятия будут доступны хорошо выспавшимся участникам Школы, уверенно владеющим основами теории графов. Большая часть материала будет преподноситься в виде задач.

Желательно порешать следующие задачи к первому занятию.

1. Обозначим через K_5 граф с пятью вершинами $1, 2, 3, 4, 5$, любые две из которых соединены ребром. Докажите, что граф K_5 не планарен.

2. Докажите, что граф, получающийся из K_5 удалением ребра (12), планарен, и при любом его изображении без самопересечений на плоскости точки 1 и 2 находятся по разные стороны от цикла 345.

3. Докажите, что граф, получающийся из K_5 удалением ребер (12) и (13), планарен, и при любом его изображении без самопересечений на плоскости

ЛИБО точки 1 и 2 находятся по разные стороны от цикла 345,

ЛИБО точки 1 и 3 находятся по разные стороны от цикла 245.

4. Докажите, что граф, получающийся из K_5 удалением ребер $(12), (13)$ и (14), планарен, и при любом его изображении без самопересечений на плоскости

ЛИБО точки 1 и 2 находятся по разные стороны от цикла 345,

ЛИБО точки 1 и 3 находятся по разные стороны от цикла 245.

ЛИБО точки 1 и 4 находятся по разные стороны от цикла 235.

5. Ой... Вы уже догадались, как формулируется эта задача и вообще как при изучении вложимости возникают булевы функции.

Примерная программа (с запасом)

1. Основные определения и результаты.

1.1. Определение 1-мерного и 2-мерного гиперграфов (полиэдров).

1.2. Линейные вложения в плоскость и R^n.

1.3. Теорема общего положения.

1.4. Подразбиение ребра. Пример: подразбиение грани. Кусочно-линейные вложения в плоскость и R^n.

1.5. Алгоритмические результаты о вложимости 2-мерных гиперграфов. Определение NP и NP-трудности.

1.6. Алгоритмические результаты о вложимости многомерных гиперграфов (Matousek-Tancer-Wagner 2010). Таблица.

2. Вложения в плоскость.

2.1. Непланарность графа K_5. Свойства зацепленности.

2.2. Теорема Куратовского. Кнопка. Теорема Халина-Юнга.

2.3.* Доказательство теоремы Халина-Юнга.

3. Вложения в трехмерное пространство.

3.1. Невложимость в R^3 конуса над K_5. Свойства зацепленности.

3.2.* Проблемы и результаты о вложимости 2-мерных гиперграфов в R^3 и в 3-мерные многообразия (Jaco-Sedgwick 1998, Tonkonog 2010).

3.3. Построение колец Борромео при помощи тора и коммутатора. Подтверждение зацепленности экспериментами.

3.4. Трехмерный аналог примера Фридмана-Крушкаля-Тайхнера: $P_{x_1\vee\overline{x}_1}$.

3.5. Обобщения: $P_{x_1x_2\vee\overline{x}_1}$, $P_{x_1x_2\vee\overline{x}_1\vee\overline{x}_2}$.

3.6. Общее построение 2-мерного гиперграфа P_f, отвечающего формуле f для булевой функции.

3.7. Необходимое условие вложимости P_f в R^3: $f(\vec{x})=0$ для некоторого $\vec{x}$. Гипотеза о достаточности.

4. Вложения в четырехмерное пространство.

4.1. Невложимость в R^4 двумерного остова 6-мерного симплекса. Свойства зацепленности.

4.2. Пример Фридмана-Крушкаля-Тайхнера.

4.3. Критерий вложимости в R^4 2-мерного гиперграфа, отвечающего формуле для булевой функции.

4.4.* Обобщение на многомерные полиэдры (Segal-Spiez-Skopenkov 1992, 1998).