Задачи к курсу В. Клепцына

Напоминание. Мы определили $\wp$-функцию Вейерштрасса, соответствующую решётке

$$\Gamma = \{n_1 \cdot 2\omega_1 + n_2 \cdot 2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \tag{1}$$

формулой

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right]. \tag{2}$$

Задача 1. Докажите, что функция Вейерштрасса действительно двоякопериодична с решёткой Γ. Один из способов это сделать — сначала доказать двоякопериодичность её производной $\wp'$, а потом понять, что ещё нужно проверить, чтобы отсюда следовала двоякопериодичность самой функции $\wp$, и доказать соответствующее утверждение.

Задача 2. Найдите первые три ненулевых члена в разложении функций $\wp$ и $\wp'$ в ряды Лорана в точке $z = 0$. Выразите коэффициенты при них через ряды Эйзенштейна

$$G_{2k}(\Gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \gamma^{-2k}. \tag{3}$$

Задача 3. Выразите через ряды Эйзенштейна *модулярные коэффициенты* g_2 и g_3 в уравнении

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \tag{4}$$

Задача 4. Уравнение Кортевега–де Фриза, или уравнение тонкой воды, выглядит как

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{5}$$

Найдите (все) его решения, движущиеся с постоянной скоростью: $u(x,t) = \varphi(x - vt)$.

Задача 5. Найдите степень отображения $z^k : S^1 \to S^1$ окружности $S^1 = \{|z| = 1\}$ в себя. Можно ли говорить о степени отображения z^k из $\mathbb{C}^*$ в себя? Из $\mathbb{C}$ в себя? Из $\widehat{\mathbb{C}}$ в себя?

Задача 6. Найдите степень отображения $\wp'$, и докажите, что у функции Вейерштрасса (как у отображения из тора в сферу Римана) нет других критических точек, кроме 0, ω_1, ω_2 и $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$.

Задача 7. Используя соображения степени, докажите, что не существует «хорошего» (=голоморфного) отображения из эллиптической кривой (=тора) в $\widehat{\mathbb{C}}$, которое как отображение в $\mathbb{C}$ имеет *единственную* особую точку — полюс *первого* порядка.

Задача 8. (Для знакомых со всеми словами в этой задаче) Докажите, что сумма вычетов в особых точках хорошего отображения из тора в $\mathbb{C}$ равна нулю. Выведите и отсюда, что не существует «хорошего» (=голоморфного) отображения из эллиптической кривой (=тора) в $\widehat{\mathbb{C}}$, которое как отображение в $\mathbb{C}$ имеет единственную особую точку, являющуюся полюсом первого порядка.