# ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ. ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ ГЕОМЕТРИЮ

Панина Г.Ю.

## Содержание

## 1. Введение

Этот текст – конспект курса из пяти лекций, прочитанных автором на летней школе "Современная математика" в Дубне в 2009 году. Автор с радостью пользуется случаем выразить благодарность и всяческие симпатии организаторам школы, а также спонсорам, лекторам, участникам и всем тем, без кого не состоялось бы это уникальное научное явление (имеются в виду школы всех лет).

Торическое многообразие — (относительно) простой пример алгебраического многообразия. На нем хорошо видны многие алгебро-геометрические объекты: пучки, сингулярности, дивизоры, пересечения и т.п.

Кроме того, теория торических многообразий связывает алгебраическую геометрию и геометрию (с акцентом на комбинаторику) выпуклых многогранников. Все, что происходит на уровне многогранников, можно перевести на алгебро-геометрический язык, и наоборот (см. "словарь" в параграфе 20). Это современная математика, уже успевшая стать классической.

В брошюре описана конструкция торического многообразия, основные соответствия, и в качестве приложения построенной теории доказана теорема Бернштейна-Кушниренко о числе корней системы полиномиальных уравнений.

Мы стремимся к максимальному упрощению, и поэтому ограничимся двумерными торическими многообразиями (соответственно, двумерными многогранниками, то есть многоугольниками). Однако хорошо иметь в виду, что все конструкции и теоремы имеют непосредственные аналоги и для старших размерностей. Иногда в тексте даются мелким шрифтом пояснения об общем случае.

Изложение не претендует ни на полноту, ни на абсолютную корректность, ни на научную новизну. Часто вместо доказательств приведена проверка частного случая.

В качестве полного и подробного (не лишенного, однако, серьезных огрехов) начального изложения этого материала можно посоветовать книгу Guenter Ewald, "Algebraic convexity"[Ewa96]. В тексте сохранены обозначения, используемые в этой книге, поэтому брошюру и книгу можно читать параллельно.

Существуют и другие книги и статьи (см. библиографию).

Предполагая, что читатель знаком с понятиями «коммутативное кольцо», «простой идеал», «факторкольцо», «поле», «гомоморфизм», «действие группы», «орбита», «проективная плоскость», «модуль над кольцом», мы все же добавили вспомогательный параграф 19.

Советы читателю: не надеяться, что будет легко. Пропустить при первом чтении вложение тора и действие тора; тем более, что эти вопросы освещены наименее подробно. Выполнять упражнения. Может оказаться полезным видеокурс лекций ( http://я здесь вставлю что надо).

Автор выражает благодарность В. Клепцыну, А. Книзель и Г. Мерзону за помощь в подготовке текста.

## 2. Проективная плоскость и проективная прямая как результат склейки карт. Функции склейки, они же – функции замены координат. Действие тора.

Прежде чем знакомиться с общими определениями, рассмотрим два примера.

Простейший пример торического многообразия – комплексная проективная прямая. Что именно под этим подразумевается?

Напомним, что проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ есть множество всех прямых на комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$, проходящих через начало координат 0. Точка на проективной прямой задается ее *однородными координатами* , поэтому имеет смысл писать

$$\mathbb{C}P^1 = \{(z_0 : z_1)| \ \ (z_0, z_1) \neq (0,0); \ \ \forall\lambda \in \mathbb{C} \ \ (z_0 : z_1) = (\lambda z_0 : \lambda z_1), \}.$$

Проективная прямая покрывается двумя своими подмножествами (*картами*): это карты

$U_1 = \{(z_0 : z_1) \in \mathbb{C}P^1 | z_0 \neq 0\}$

и $U_2 = \{(z_0 : z_1) \in \mathbb{C}P^1 | z_1 \neq 0\}$.

Разделив на $z_0$ и обозначив $u = z_1/z_0$, первую карту можно отождествить с комплексной прямой с координатой $u$:

$$U_1 = \{(z_0 : z_1) \in \mathbb{C}P^1 | z_0 \neq 0\} = \{(1, z_1/z_0)\} = \{(1, u)\} = \mathbb{C}.$$

Совершенно аналогично вторая карта тоже отождествляется с комплексной прямой $\mathbb{C}^1$ с координатой $p = z_0/z_1$.

Поэтому проективную прямую можно представить как результат склейки двух копий аффинных прямых $\mathbb{C}^1$. При этом правило склеивания таково: точка первой прямой, координата которой $u$, приклеивается к точке второй прямой, координата которой $p = 1/u$.

Разумеется, точка с нулевой координатой не приклеивается ни к чему. Эта склейка изображена на рис. 1. Пусть Вас не смущает, что комплексную прямую мы изображаем в виде луча – это только схема склейки (подобная, например, кругам Эйлера), а не геометрическая картинка.

То же самое, но другими словами: пусть точка $x$ на проективной прямой попадает одновременно в обе карты (таковыми являются все точки кроме двух, проверьте!). Тогда у $x$ есть две координаты $u$ и $p$ – из первой карты и из второй. Переход от одной координаты к другой задается правилом $p = 1/u$.

**Определение 2.1.** $n$ *– мерным тором* называется $T^n = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.

То есть $T^n = \{(t_0, ..., t_{n-1}) | t_i \neq 0\}$. Элементы тора можно покоординатно перемножать:

$$(t_0, ..., t_{n-1}) \cdot (t'_0, ..., t'_{n-1}) = (t_0 t'_0, ..., t_{n-1} t'_{n-1}),$$

что превращает тор в группу по умножению.

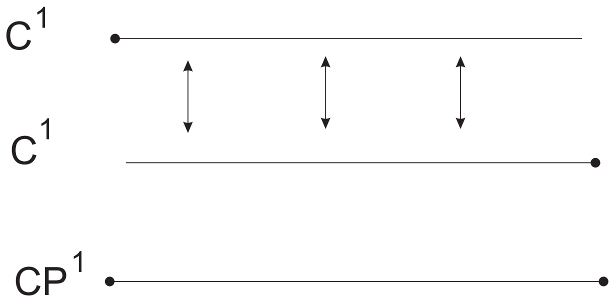


Рис. 1. Проективная прямая как склейка

Тор $T^1$ действует на $\mathbb{C}^1$ по правилу:

$$(t_0)(z) = t_0 \cdot z.$$

Далее, тор $T^1$ действует на $\mathbb{C}P^1$ по правилу:

$$(t_0)(z_0 : z_1) = (t_0 \cdot z_0 : z_1).$$

**Задача 2.2.** Покажите, что на проективной прямой есть три орбиты действия тора.

Подытожим немногое сказанное:

(1) Проективная прямая есть результат склейки двух карт.
(2) Каждая из карт всюду плотна в $\mathbb{C}P^1$.
(3) Каждая из карт – аффинная комплексная прямая.
(4) Функции склейки (они же – функции замены координат) имеют вид $p = 1/u$, то есть являются *мономами Лорана.*
(5) Каждая из карт инвариантна при действии тора.
(6) Пересечение обеих карт можно отождествить с тором $T^1$
(7) Проективную прямую можно получить из одномерного тора *компактификацией*, то есть приклеиванием двух точек – "нуля" и "бесконечности"(в системе координат, связанной с первой картой). При переходе к системе координат второй карты, "ноль"и "бесконечность"меняются местами.
(8) Сам тор, "ноль" и "бесконечность" – орбиты действия тора.

Вышесказанное можно практически дословно повторить для проективной плоскости. Я рекомендую проделать это самостоятельно, сравнив затем с написаным ниже.

Проективная плоскость $\mathbb{C}P^2$ есть множество всех прямых в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$, проходящих через начало координат 0. Точка на проективной плоскости задается ее *однородными координатами* , поэтому имеет смысл писать

$$\mathbb{C}P^2 = \{(z_0 : z_1 : z_2) | (z_0, z_1, z_2) \neq (0,0,0);\ (z_0 : z_1 : z_2) = (\lambda z_0 : \lambda z_1 : \lambda z_2), \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

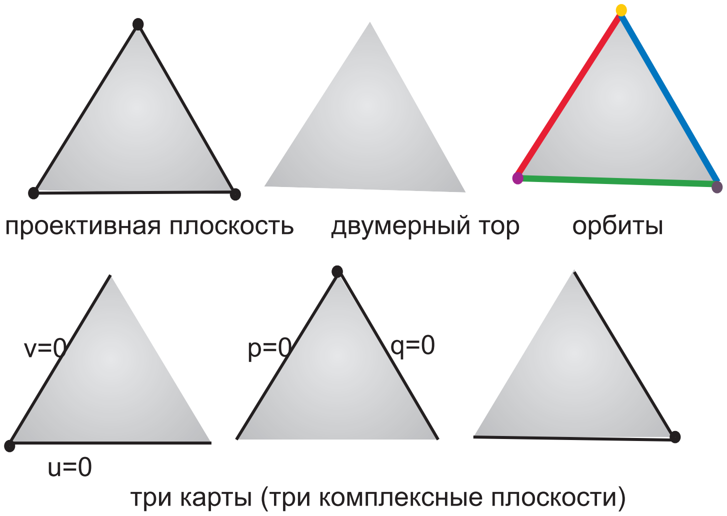


Рис. 2. Проективная плоскость как склейка

Проективная плоскость покрывается тремя своими подмножествами (*картами*):
это карта $U_1 = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2 | z_0 \neq 0\}$,
карта $U_2 = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2 | z_1 \neq 0\}$
и карта $U_3 = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2 | z_2 \neq 0\}$.
Разделив на $z_0$ и обозначив $u = z_1/z_0, \quad v = z_2/z_0$, первую карту можно отождествить с комплексной плоскостью с координатами $(u, v)$:

$$U_1 = \{(1, z_1/z_0, z_2/z_0)\} = \{(1, u, v)\} = \mathbb{C}^2.$$

Совершенно аналогично вторая карта тоже отождествляется с комплексной плоскостью $\mathbb{C}^1$ с координатами $(p, q) = (z_0/z_1, z_2/z_1)$. То же верно и для третьей карты.

Поэтому проективную плоскость можно представить как результат склейки трех копий аффинных плоскостей $\mathbb{C}^2$. При этом правило склеивания таково: точка первой карты, координаты которой $(u, v)$, приклеивается к точке второй карты, координаты которой $p = 1/u, q = v/u$. Эта склейка изображена (как и раньше, схематически) на рис. 2.

Повторим то же, но другими словами: пусть точка $x$ на проективной плоскости попадает одновременно в две карты. Тогда у $x$ есть координаты из первой карты и из второй. Переход от одной системы координат к другой задается правилом $(p = 1/u, \; q = v/u)$.

**Определение 2.3.** Двумерный тор $T^2$ действует на $\mathbb{C}^2$ по правилу:

$$(t_0, t_1)(z_0, z_1) = (t_0 \cdot z_0, t_1 \cdot z_1).$$

Двумерный тор $T^2$ действует на $\mathbb{C}P^2$ по правилу:

$$(t_0, t_1)(z_0 : z_1 : z_2) = (t_0 \cdot z_0 : t_1 \cdot z_1 : z_2).$$

**Задача 2.4.** Покажите, что проективная плоскость под действием тора распадается на семь орбит (см. рис. 2).

Опять подытожим сказанное:

(1) Проективная плоскость есть результат склейки трех карт.
(2) Каждая из карт всюду плотна в $\mathbb{C}P^2$.
(3) Каждая из карт – аффинная комплексная плоскость.
(4) Функции склейки (они же – функции замены координат) имеют вид $q = 1/u, p = v/u$, то есть являются *мономами Лорана* (т. е. мономами, в которых допускаются отрицательные степени переменных).
(5) Каждая из карт инвариантна при действии тора.
(6) Пересечение трех карт можно отождествить с тором $T^2$
(7) Проективную плоскость можно получить из двумерного тора компактификацией, которая в данном случае означает приклеивание трех взаимно пересекающихся проективных прямых. Если зафиксировать карту (скажем, первую), то две из этих прямых задаются уравнениями $u = 0$ и $v = 0$, а третья – т. наз. прямая на бесконечности. При переходе к системе координат другой карте, "нули"и "бесконечности"меняются местами.
(8) Орбиты показаны разными цветами на рис. 2.

**Задача 2.5.** На проективной плоскости лежит компактная кривая, задаваемая уравнением $u = v^3$ в первой карте. Каково ее уравнение во второй карте?

**Задача 2.6.** Покажите, что прямое произведение $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ покрывается четырьмя копиями $\mathbb{C}^2$. Найдите функции перехода между четырьмя системами координат.

Понятие *двумерного торического многообразия* обобщает эти три примера ($\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}P^1$ и $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$). Точное определение появится позже, но уже сейчас можно указать направление обобщения:

(1) Всякое торическое многообразие $X$ – результат склейки нескольких карт.
(2) Каждая карта – аффинное торическое алгебраическое многообразие (о них пойдет речь в следующем параграфе). Однако при первом чтении удобно представлять себе, что каждая из карт – аффинная комплексная плоскость. Это всегда так, если многообразие гладкое.
(3) Каждая из карт всюду плотна в $X$.
(4) Функции склейки (они же – функции замены координат) являются мономами Лорана.
(5) На многообразии $X$ действует двумерный тор $T^2$.
(6) Каждая из карт инвариантна при действии тора.
(7) Пересечение всех карт можно отождествить с тором $T^2$. Оно является всюду плотной орбитой.

(8) $X$ является компактификацией тора $T^2$. Это значит, что к тору приклеиваются несколько (взаимно пересекающихся) проективных прямых. В каждой из карт две из этих прямых (для каждой из карт – свои две) задаются уравнениями типа "одна из координат $= 0$ а другие в некотором смысле находятся на бесконечности. При переходе от одной карты к другой, "нули"и "бесконечности"меняются местами.

(9) Орбиты под действием тора таковы:
- большая орбита, пересечение всех карт, то есть тор $T^2$,
- приклеенные к нему проективные прямые (взятые без точек взаимных пересечений)
- и нульмерные орбиты – (одноточечные) пересечения проективных прямых, добавленных при компактификации.

## 3. Что такое карта? Аффинные и квазиаффинные алгебраические многообразия

В этом параграфе мы изучим основные понятия аффинной алгебраической геометрии.

**Аффинные алгебраические многообразия.** Введем вначале некоторые удобные обозначения. Для мультипеременной $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_n)$ и $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n$ обозначим

$$\mathbf{z}^{\mathbf{a}} = z_1^{a_1} \cdot ... \cdot z_n^{a_n}.$$

Такая запись сохраняет обычное свойство степени:

$$\mathbf{z}^{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{z}^{\mathbf{b}} = \mathbf{z}^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}.$$

Обозначим через $R = \mathbb{C}[z_1, ..., z_n] = \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ кольцо полиномов от $n$ переменных с комплексными коэффициентами.

**Определение 3.1.** Кольцо $R$ называется *кольцом регулярных функций на* $\mathbb{C}^n$.

**Определение 3.2.** Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ – некоторое множество полиномов. Множество их общих нулей $V(\mathfrak{a}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid f \in \mathfrak{a} \Rightarrow f(\mathbf{z}) = 0\}$ называется *аффинным алгебраическим множеством.*

Наоборот, всякое подмножество $Z \subset \mathbb{C}^m$ задает множество полиномов, обнуляющихся на нем: $i_Z = \{f \in \mathbb{C}[\mathbf{z}] : f\mid_Z = 0\}$.

**Задача 3.3.** Покажите, что $i_Z$ – идеал.

Примеры аффинных алгебраических множеств.

- $\mathbb{C}^n$ – аффинное алгебраическое множество. Это так, поскольку $\mathbb{C}^n = V(\{0\})$, где 0 – полином, тождественно равный нулю.
- $\{0\}$ – аффинное алгебраическое множество, поскольку $\{0\} = V(< z_1, ..., z_n >)$. Здесь $< z_1, ..., z_n >$ – идеал, порожденный полиномами $z_1, ..., z_n$.

- Пусть аффинные алгебраические множества $A_1$ и $A_2$ задаются уравнениями $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ соответственно (говоря точнее, пусть
  $A_1 = V(< f_1 >)$ и $A_2 = V(< f_2 >)$). Тогда их пересечение и объединение тоже являются аффинными алгебраическими множествами, так как
  $A_1 \cap A_2 = V(< f_1, f_2 >)$ и $A_1 \cup A_2 = V(< f_1 \cdot f_2 >)$.

**Задача 3.4.** Покажите, что пересечение и объединение аффинных алгебраических множеств – аффинное алгебраическое множество. Покажите, что каждая точка $\mathbb{C}^n$ – аффинное алгебраическое множество.

**Определение 3.5.** Набор всех аффинных алгебраических множеств порождает т. наз. *топологию Зарисского* на $\mathbb{C}^n$. В этой топологии замкнутыми считаются аффинные алгебраические множества.

На всяком аффинном алгебраическом многообразии $X \subset \mathbb{C}^n$ имеется *индуцированная топология Зарисского.*

Топология Зарисского не похожа на обычную Евклидову топологию:

- Всякая цепочка попарно различных вложенных замкнутых множеств конечна;
- Никакие две точки не обладают непересекающимися окрестностями;
- Всякое непустое открытое множество в этой топологии всюду плотно.

**Определение 3.6.** Аффинное алгебраическое множество *неприводимо*, если его нельзя представить в виде объединения двух аффинных алгебраических множеств, не лежащих одно в другом.

Неприводимое аффинное алгебраическое множество называется *аффинным алгебраическим многообразием.*

**Лемма 3.7.** *Всякое аффинное алгебраическое множество единственным образом представляется в виде объединения неприводимых.* $\square$

**Теорема 3.8.** *(Теорема Гильберта о нулях.) Пусть* $\mathfrak{a}$ *- идеал в* $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}]$. *Тогда*

$$f \in i_{V(\mathfrak{a})} \Leftrightarrow \exists k : f^k \in \mathfrak{a}. \quad \square$$

Благодаря этой теореме, геометрические утверждения можно перевести на язык колец регулярных функций:

**Задача 3.9.** Докажите, пользуясь теоремой Гильберта о нулях, что имеется взаимно-однозначное соответствие:

| | | |
|---|---|---|
| **максимальные идеалы кольца** $R$ | $\leftrightarrow$ | **точки пространства** $\mathbb{C}^n$ |
| **простые идеалы кольца** $R$ | $\leftrightarrow$ | **неприводимые алг. множества в** $\mathbb{C}^n$ |

Говоря точнее, покажите, что:

- Аффинное алгебраическое множество $X \subset \mathbb{C}^n$ – одноточечное множество тогда и только тогда, когда $i_X$ – максимальный идеал.

- Аффинное алгебраическое множество $X$ неприводимо тогда и только тогда, когда $i_X$ – простой идеал.

Мы определили аффинное алгебраическое многообразие как некоторое множество точек. Однако важна еще дополнительная структура, несущая всю информацию об аффинном многообразии – кольцо регулярных функций:

**Снабжаем многообразие кольцом регулярных функций.** Перейдем к внутренней геометрии аффинного многообразия $X \subset \mathbb{C}^n$. То есть, представим, что мы живем в $X$ и не знаем, что делается в остальных точках $\mathbb{C}^n$. Каждый полином из $R$ нам видится как его сужение на $X$. В частности, все полиномы из $i_X$ нам видятся нулевыми. Поэтому естественно ввести кольцо сужений полиномов на многообразие $X$:

**Определение 3.10.** Кольцо $R(X) := R/i_X$ называется *кольцом регулярных функций* на многообразии $X$.

До сих пор мы рассматривали многообразие $X$ как подмножество многообразия $\mathbb{C}^n$.

Теперь рассмотрим более общий случай: многообразие $Y \subset X$ и объемлющее многообразие $X$. Верны аналоги описаных выше соответствий:

$$\begin{array}{rcl} \textbf{максимальные идеалы кольца } R(X) & \leftrightarrow & \textbf{точки многообразия } X \\ \textbf{простые идеалы кольца } R(X) & \leftrightarrow & \textbf{алг. подмногообразия } X. \end{array}$$

**Строим многообразие по кольцу регулярных функций.** Пусть $\mathcal{R}$ — конечнопорожденная $\mathbb{C}$-алгебра, область целостности. Как построить аффинное многообразие, для которого $\mathcal{R}$ служила бы кольцом регулярных функций?

Наиболее абстрактный ответ таков: в качестве $X$ надо взять множество всех максимальных идеалов $\mathcal{R}$, то есть положить $X = Specm\ \mathcal{R}$.

Иначе можно поступить так: представим $\mathcal{R}$ как фактор кольца полиномов по некоторому идеалу: $\mathcal{R} = \mathbb{C}[\mathbf{z}]/\mathfrak{a}$.

**Задача 3.11.** Покажите, что это всегда можно сделать.

Теперь ясно, что в качестве $X$ надо взять многообразие $X = V(\mathfrak{a})$.

Мы только что описали аффинные алгебраические многообразия. Они служат картами для склейки алгебраических многообразий. Однако в рамках этой брошюры нас интересуют *торические* многообразия, поэтому мы сейчас несколько сузим общее множество карт до аффинных торических многообразий.

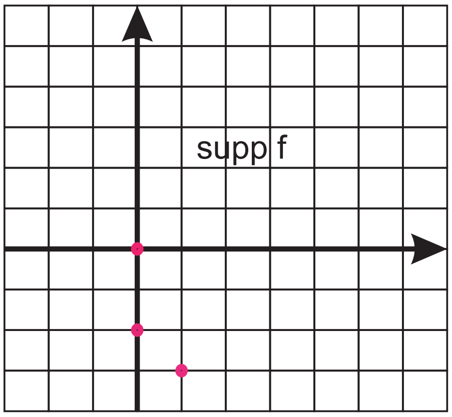


Рис. 3. Носитель полинома Лорана $f = z_1 z_2^{-3} + 3/z_2^2 + 1$

## 4. Аффинные торические алгебраические многообразия

Рассмотрим кольцо полиномов Лорана от двух переменных $\mathbb{C}[\mathbf{z}, \mathbf{z}^{-1}] = \mathbb{C}[z_1, z_2, z_1^{-1}, z_2^{-1}]$. Всякий полином Лорана представим в виде конечной суммы мономов Лорана:

$$f = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^2} \lambda_{\mathbf{a}} \mathbf{z}^{\mathbf{a}}, \text{ где } \lambda_{\mathbf{a}} \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$ и стандартную решетку $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Ее элементы называются *векторами решетки* ( *точками решетки или узлами решетки*).

**Определение 4.1.** *Носителем полинома Лорана* называется множество узлов решетки $supp\ f = \{\mathbf{a} \mid \lambda_{\mathbf{a}} \neq 0\} \subset \mathbb{Z}^2$. (См. рис. 3.)

**Определение 4.2.** Пусть $M \subset \mathbb{Z}^2$ – некоторое конечное множество векторов решетки. *Конусом, натянутым на* $M$ называется множество

$$pos(M) := \{\lambda_1 y_1 + ... + \lambda_k y_k : \lambda_i \geq 0, y_i \in M\}.$$

Таким образом, по определению, все конуса выпуклые, замкнутые, и с рациональными сторонами-лучами (если стороны имеются).

Примеры конусов:

- Луч с вершиной в начале координат 0.
- (Выпуклая) часть плоскости, заключенная между двумя лучами с общей вершиной в начале координат 0.
- Вся плоскость.
- Полуплоскость, граница которой содержит 0.

У конусов 1,2 и 3 (см. рис. 4) есть вершина. Опять же, из определения следует, что вершина конуса всегда совпадает с началом координат.

Обратим внимание, что пересечение конуса с решеткой $\sigma \cap Z^2$ – полугруппа с нулем (относительно сложения).

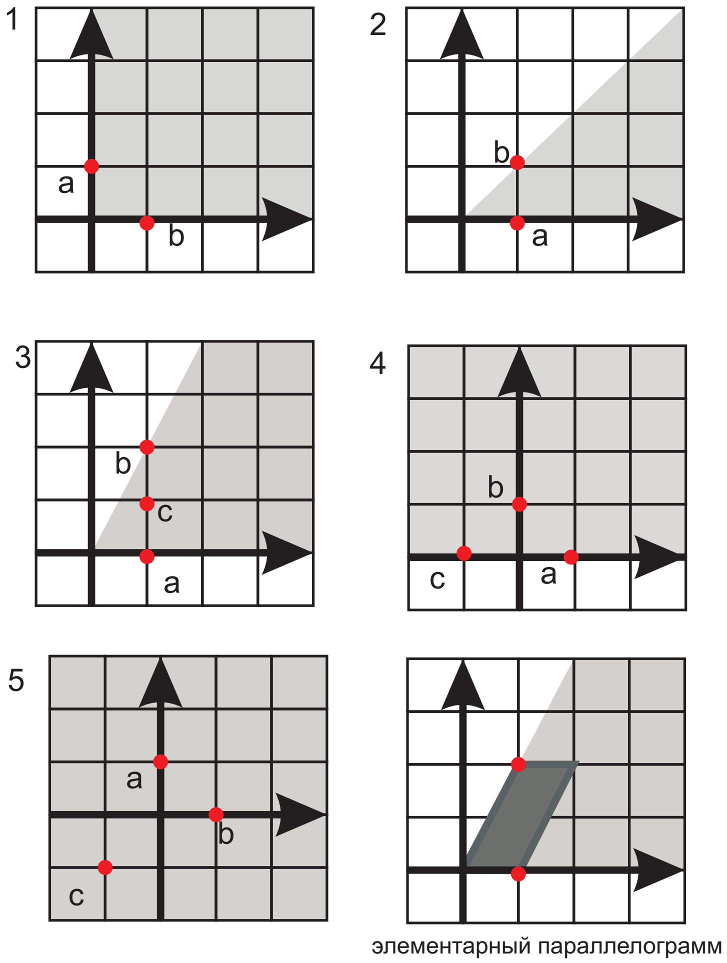


Рис. 4. Конуса на плоскости

**Определение 4.3.** Для конуса с вершиной определим *элементарный параллелограмм* как паралеллограмм, натянутый на кратчайшие векторы решетки, идущие вдоль боковых лучей конуса (см. рис. 4).

**Задача 4.4.**
- Покажите, что полугруппа $\sigma \cap Z^2$ конечно порождена. Покажите, что в качестве конечной системы образующих достаточно взять все узлы решетки элементарного параллелограмма конуса.
- Покажите, что объем элементарного параллелограмма конуса равен единице тогда и только тогда, когда полугруппа $\sigma \cap \mathbb{Z}^2$ порождена ровно двумя элементами. Такие конуса будем называть *регулярными*.

**Определение 4.5.** Пусть $\sigma$ – конус в $R^2$. Свяжем с ним подкольцо кольца полиномов Лорана :

$$R_\sigma := \{f \in \mathbb{C}[\mathbf{z}, \mathbf{z}^{-1}] : supp\ f \subset \sigma\}.$$

Кольцо $R_\sigma$ – область целостности. Следовательно, оно является кольцом регулярных функций некоторого аффинного алгебраического многообразия $X_\sigma$. Последнее называется *аффинным торическим многообразием, связанным с конусом* $\sigma$.

Более точно, $R_\sigma$ задает многообразие $X_\sigma$ с точностью до изоморфизма торических многообразий. Однако понятие изоморфизма появится позже.

По конусу $\sigma$ алгебра $R_\sigma$ и многообразие $X_\sigma$ сторятся явно:

- Выберем набор точек решетки $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$, порождающий полугруппу $\sigma \cap \mathbb{Z}^2$. Тогда мономы $u_1 = \mathbf{z}^{\mathbf{a}_1}, ..., u_k = \mathbf{z}^{\mathbf{a}_k}$ порождают кольцо $R_\sigma$. Иными словами, всякий элемент $R_\sigma$ представляется в виде полинома с комплексными коэффициентами от $u_1, ..., u_k$. Однако мы не можем сказать, что $R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, ..., u_n]$, так как между этими мономами имеются некоторые соотношения, которые проистекают из линейных соотношений между $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ (вспомним, что набор образующих полугруппы совсем не всегда является базисом).
- Выпишем линейные соотношения между $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$. Каждое линейное соотношение представим в виде $\Sigma\lambda_i\mathbf{a}_i = \Sigma\mu_i\mathbf{a}_i$, где $\lambda_i, \mu_i > 0$. Для этого надо просто сгруппировать слагаемые справа или слева от "=" в зависимости от их знака.
- Итак, кольцо $R_\sigma$ порождено элементами $u_1, ..., u_k$. Образующие соотношения в нем – образы линейных соотношений. Они имеют вид $\mathbf{u}^\lambda = \mathbf{u}^\mu$.
- Таким образом, $R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, ..., u_n]/ < \{\mathbf{u}^\lambda - \mathbf{u}^\mu\} >$,
  и следовательно, $X_\sigma = V(< \mathbf{u}^\lambda - \mathbf{u}^\mu >)$.

**Пример 4.6.** *Построим многообразия $X_\sigma$ для конусов, представленных на рис. 4.*

(1) *Для этого конуса очевидно (и без приведенного выше алгоритма), что $R_\sigma = \mathbb{C}[z_1, z_2]$, а это кольцо регулярных функций на комплексной плоскости. Следовательно, $X_\sigma = \mathbb{C}^2$.*

(2) *Этот конус порожден двумя линейно независимыми элементами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Следовательно, $R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, u_2]$, где $u_1 = \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{a}}$, $u_2 = \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{b}}$. Опять получаем $X_\sigma = \mathbb{C}^2$.*

(3) *Эта полугруппа не порождена линейно независимыми элементами. Придется взять три элемента $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Линейное соотношение здесь одно: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{c}$. Следовательно,*

$$R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, ..., u_3]/ < u_1u_2 = u_3^2 >,$$

*и многообразие $X_\sigma$ – поверхность, лежащая в $\mathbb{C}^3$, задаваемая уравнением $u_1u_2 = u_3^2$, см. рис. 5.*

(4) *Полугруппа порождена тремя элементами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Линейное соотношение здесь опять одно: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = 0$. Следовательно,*

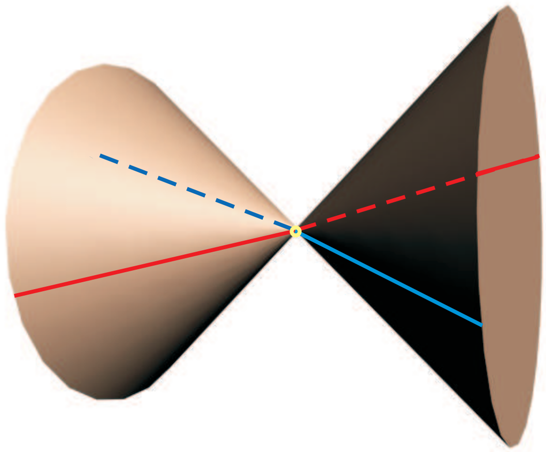

Рис. 5. Аффинное торическое многообразие с сингулярностью. На рисунке показаны четыре орбиты

*$R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, ..., u_3]/ < u_1u_3 = 1 >$, и многообразие $X_\sigma$ – поверхность, лежащая в $\mathbb{C}^3$, задаваемая уравнением $u_1u_3 = 1$ (гиперболический цилиндр).*

(5) *Полугруппа порождена тремя элементами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Линейное соотношение такое: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$. Следовательно,*

*$R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, ..., u_3]/ < u_1u_2u_3 = 1 >$, и многообразие $X_\sigma$ – поверхность, лежащая в $\mathbb{C}^3$, задаваемая уравнением $u_1u_2u_3 = 1$.*

Обобщив пример (2), легко получить следующую лемму:

**Лемма 4.7.** *Для регулярного конуса $X_\sigma = \mathbb{C}^2$.* □

## 5. Квазиаффинные торические алгебраические многообразия. Изоморфизм многообразий

Рассмотрим пример аффинного многообразия (4) (см. также рис. 6). Трехмерная гипербола $X_\sigma = X_{\mathbb{R}^2}$ проецируется на комплексную плоскость без координатных осей (то есть на двумерный тор) $\mathbb{C}^2 \setminus \{u_1 = 0\} \vee \{u_2 = 0\} = T^2$ забыванием третьей координаты:

$$\pi(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2).$$

Отображение, обратное этой проекции, задается формулой

$$\pi^{-1}(u_1, u_2) = (u_1, u_2, (u_1u_2)^{-1}).$$

Иначе говоря, мы имеем дело с биективным отображением, задаваемым в обе стороны мономами Лорана. Хотелось бы сказать по определению, что $X_{\mathbb{R}^2}$ и $T^2$ изоморфны как аффинные алгебраические многообразия. Однако $T^2$ не является таковым. Поэтому прежде чем вводить понятие изоморфизма, расширим класс аффинных многообразий до квазиаффинных:

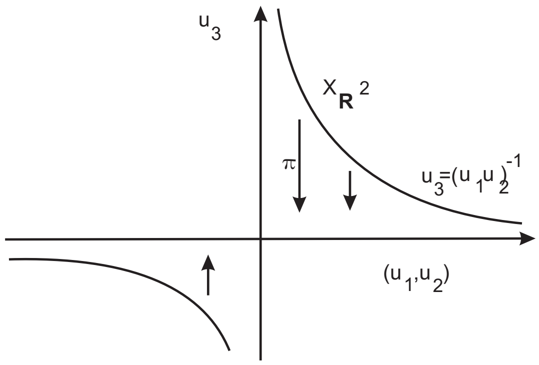


Рис. 6. Аффинное многообразие $X_{\mathbb{R}^2}$ и его изоморфизм с двумерным тором $T^2$

**Определение 5.1.** *Квазиаффинным алгебраическим многообразием* называется открытое (в топологии Зарисского) подмножество аффинного алгебраического многообразия.

Теперь можно говорить об изоморфизме:

**Определение 5.2.** Два квазиаффинных торических многообразия называются *торически изоморфными* (для краткости будем писать далее просто "*изоморфными*"), если между ними существует биекция, выражаемая в обе стороны мономами Лорана. Разумеется, эти мономы Лорана должны быть определены всюду на многообразии.

Подытожим сказанное: нам понадобилось ввести понятие квазиаффинного многообразия, так как бывают квазиаффинные многообразия, изоморфные аффинным.

Вернемся опять к алгоритму построения торического многообразия по выпуклому конусу. Формально говоря, в алгоритме присутствует неоднозначность: на первом шаге мы можем выбрать разные системы образующих и получить разные многообразия. Однако эти многообразия будут изоморфны. Вот пример:

**Задача 5.3.** Рассмотрите для конуса 1 (см. рис. 4) две системы образующих: $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ и $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}\}$. Для каждой из этих систем алгоритм дает разные (хотя и изоморфные) многообразия. Постройте оба многообразия и найдите изоморфизм между ними.

**Поле рациональных функций. Кольцо регулярных функций на квазиаффинном многообразии.** Пусть $X$ – аффинное торическое многообразие, $R_X$ – кольцо регулярных функций на нем. Поскольку $R_X$ – область целостности, корректно определено поле частных кольца $R_X$:

$$K_X = \{f/g \mid f, g \in R_X;\ g \text{ не равна тождественно нулю на X}\}.$$

Оно состоит из всевозможных формальных дробей, обращаться с которыми (складывать, умножать, сокращать) надо так же, как и с обычными дробями.

Всякий элемент из $K_X$ – это, с одной стороны, формальная дробь, а с другой стороны – функция, заданная на $X \setminus \{g = 0\}$.

Поле $K_X$ называется *полем рациональных функций* на $X$. По построению, поле $K_X$ содержит кольцо $R_X$. При этом верно следующее: рациональная функция определена всюду на $X$ тогда и только тогда, когда она лежит в кольце $R_X$, то есть является некоторым полиномом (а точнее – сужением некоторого полинома на $X$).

**Определение 5.4.** Пусть $Y = X \setminus V(\mathfrak{a})$ – некоторое квазиаффинное многообразие.

*Кольцом регулярных функций* на $Y$ называется подмножество поля $K_X$

$$R_Y = \{f/g \in K_X \mid g \text{ нигде не обращается в ноль на Y.}\}$$

**Пример 5.5.**
- *Для комплексной прямой $X = \mathbb{C}^1$ кольцо регулярных функций есть кольцо полиномов: $R_X = \mathbb{C}[z]$.*
- *Аналогично, для комплексной плоскости $X = \mathbb{C}^2$ кольцо регулярных функций есть кольцо полиномов: $R_X = \mathbb{C}[z_1, z_2] = \mathbb{C}[\boldsymbol{z}]$.*
- *Чем больше мы выкидываем из многообразия, тем больше становится кольцо регулярных функций: для $X = \mathbb{C}^1 \setminus \{O\}$ кольцо $R_X$ есть кольцо полиномов Лорана от одной переменной.*

  *Забегая вперед отметим, что если не выкидывать точки, а добавлять, то регулярных функций становится меньше. Например, если к $X = \mathbb{C}^1$ добавить бесконечно удаленную точку (получится проективная прямая), то регулярными будут только константы, так как все прочие полиномы не определены на бесконечности.*
- *Для тора $X = T^2$ мы имеем $R_X = \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}^{-1}]$.*

**Вложение тора. Действие тора.** Пусть для конуса $\sigma$ точки $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}$ порождают полугруппу $\sigma \cap \mathbb{Z}^2$. Тогда отображение

$\gamma : T^2 \to X_\sigma \subset \mathbb{C}^k$, действующее по правилу

$\gamma : \mathbf{t} = (t_1, t_2) \to (\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, ..., \mathbf{t}^{\mathbf{a}_k})$

биективно отображает тор $T^2$ на квазиаффинное многообразие

$X_\sigma \setminus \{z_i = 0\}_{i=1}^k$.

Кроме того, тор действует на $X_\sigma$:

$\mathbf{t} = (t_1, t_2) : (x_1, ...x_k) \to (\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1} x_1, ..., \mathbf{t}^{\mathbf{a}_k} x_k)$.

**Задача 5.6.** Проверьте, что действие тора корректно, то есть что описанное отображение переводит точку многообразия в точку многообразия.

Многообразие распадается на орбиты, причем каждая из орбит определяется равенством-неравенством нулю координатных функкций $z_i$.

**Задача 5.7.** Найдите орбиты для многообразий $X_\sigma$ из примера 4.6.

## 6. Как склеить две карты?

Аффинные алгебраические многообразия (за исключением одноточечных) не бывают компактными. Это плохо, так как теряются многие замечательные структуры и свойства (когомологии, пучки...). Говоря очень грубо, компактифицировать многообразия можно, приклеив что-то "на бесконечности"(подобно тому, как приклеивание бесконечно удаленной прямой превращает плоскость в проективную плоскость). Компактификация аффинного иногообразия далеко не единственна.

Мы будем строить компактификацию так: возьмем несколько аффинных многообразий и склеим их между собой (примерно так, как была склеена проективная плоскость).

Научимся вначале склеивать два торических многообразия $X_\sigma$ и $X_{\sigma'}$ . Важно, что соответствующие конуса $\sigma$ и $\sigma'$ должны быть расположены не как попало, а с соблюдением некоторых правил.

**Выделяем "место склейки".** Рассмотрим вначале следующий пример.

**Пример 6.1.** *Пусть конуса $\sigma \subset \tau$ устроены так, как показано на рисунке 7. Точнее, пусть $\tau$– полуплоскость, а $\sigma$ содержится в полуплоскости и прилегает к ее стороне. Тогда $X_\tau$ можно отождествить с квазиаффинным подмногообразием $X_\sigma$.*

Действительно, пусть $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ – порождающие элементы для конуса $\sigma$. Тогда $\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ – порождающие элементы для конуса $\tau$. Далее, для элементов $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ выполнены некоторые линейные соотношения. Тогда для $\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ выполнены в точности те же соотношения плюс еще одно: $\mathbf{b} + \mathbf{a}_1 = 0$.

Поэтому многообразие $X_\sigma$ лежит в $\mathbb{C}^n$, где задается некоторым набором уравнений. Соответственно, $X_\tau$ лежит в $\mathbb{C}^{n+1}$, где задается тем же самым набором уравнений плюс уравнением $z_1 z_{n+1} = 1$.

Значит, проекция $\pi$, забывающая последнюю координату, биективно отображает $X_\tau$ на квазиаффинное многообразие $X_\sigma \setminus \{z_1 = 0\}$. Поскольку отображение $\pi$ и обратное к нему выражаются мономами Лорана, мы имеем дело с торическим изоморфизмом, и имеем право отождествить $X_\tau$ с подмногообразием $X_\sigma$.

Иначе можно сказать так: $X_\sigma$ получается из $X_\tau$ приклеиванием нулей функции $z_1$.

**Принцип склейки двух карт.** Предположим, что два конуса $\sigma$ и $\sigma'$ прилегают к границе полуплоскости так, как показано на рис. 8. Тогда и многообразие $X_\sigma$, и многообразие $X_{\sigma'}$ содержат в качестве квазиаффинного подмногообразия изоморфную копию $X_\tau$. По этому "общему куску"мы можем склеить $X_\sigma$ и $X_{\sigma'}$.

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – точки решетки (см. рис. 9). Обозначим $u = \mathbf{z}^{\mathbf{a}}, v = \mathbf{z}^{\mathbf{b}} = 1/u$.

Результат склейки получается из $X_\tau$ приклеиванием нулей функций $u$ и $v$.

Результат склейки уже не будет аффинным алгебраическим многообразием.

**Задача 6.2.** Пусть конус $\tau$ – вся плоскость. Покажите, что в этом случае $X_\tau$ также можно отождествить с подмногообразием $X_\sigma$.

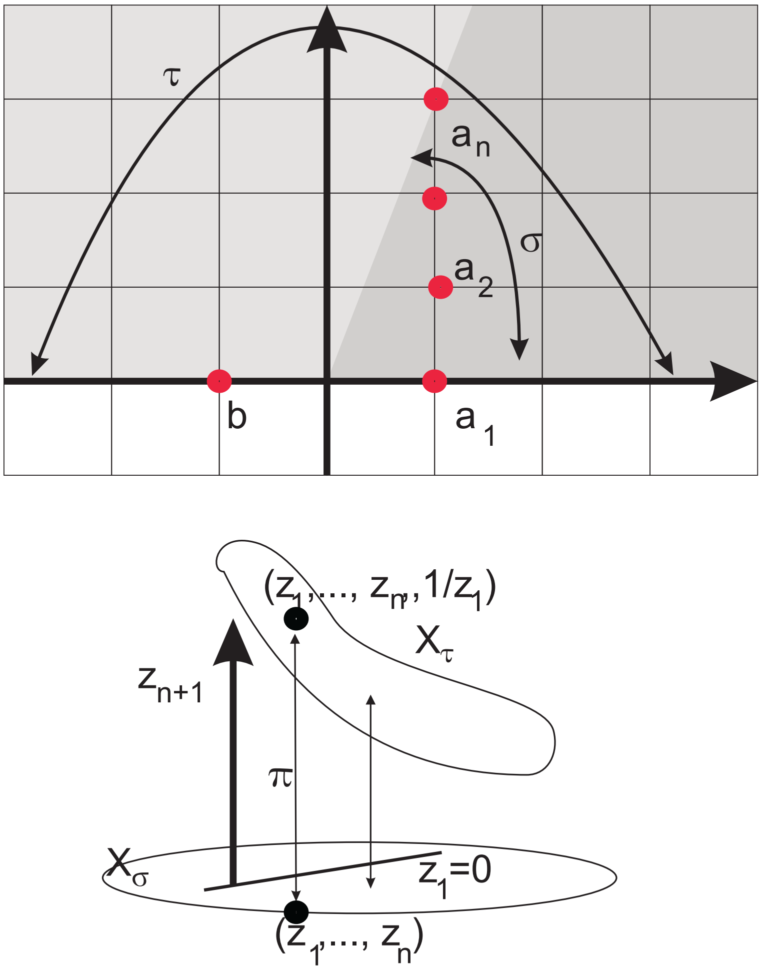


Рис. 7. Два конуса (один прилегает к стороне другого) и то, как связаны соответствующие торические многообразия: $X_\tau \subset X_\sigma$

**Пример 6.3.** *Пусть конуса в точности такие, как показано на рис. 9. Пусть точки* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *порождают первый конус, а точки* $\boldsymbol{c}$ *и* $\boldsymbol{d}$ *– второй.*

*Мы можем склеить* $X_\sigma$ *и* $X_{\sigma'}$ *(это две комплексные плоскости) по* $X_\tau$*, получив многообразие* $X$*. На пересечении обеих карт* $X_\sigma$ *и* $X_{\sigma'}$ *есть две системы координат:* $(u, v) = (\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{b}})$ *и* $(p, q) = (\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{d}})$*. Поскольку* $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a}$*,* $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$*, эти координаты связаны уравнениями* $p = 1/u$*,* $q = v/u$*. Иными словами, функции склейки – те же, что и для карт проективной плоскости. Таким образом, в результате склейки мы получим проективную плоскость за вычетом одной точки (см. рис. 2).*

Прежде чем описать склейку нескольких карт, рассмотрим вспомогательные конструкции.

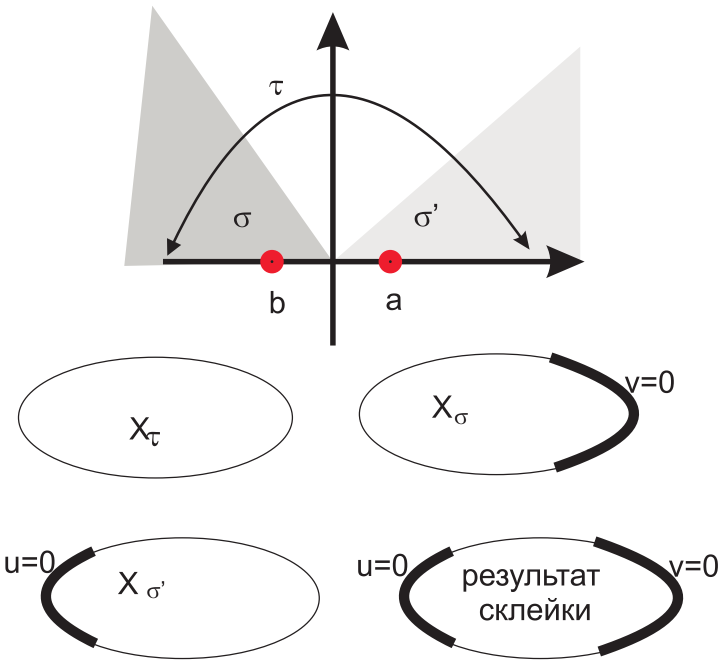


Рис. 8. Два конуса (один прилегает к стороне другого) и то, как связаны соответствующие торические многообразия: $X_\tau \subset X_\sigma$

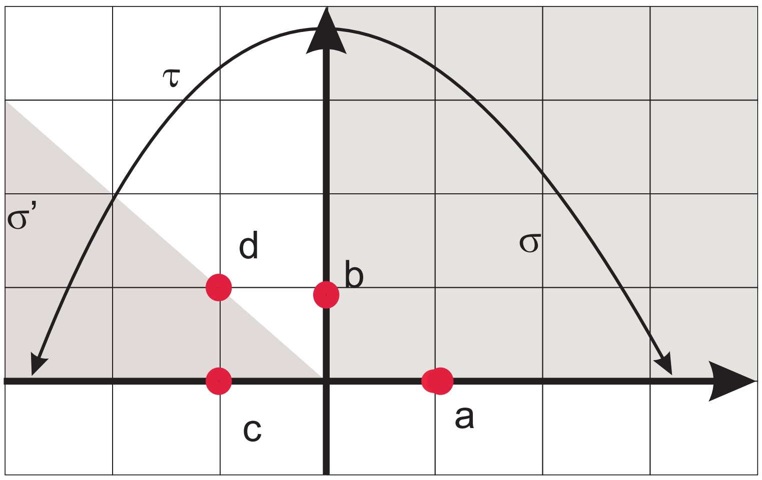


Рис. 9. Два конуса дающие кусочек проективной плоскости

## 7. Веер, двойственные конуса, выпуклые многоугольники

Рассмотрим разбиение плоскости на выпуклые конуса рациональными лучами. Оно естественым образом порождает некоторый набор конусов: все двумерные конуса, все лучи и точка 0. Мы будем рассматривать только такие разбиения, когда все конуса строго меньше полуплоскости. (см. рис. 10). Такой набор конусов называется *веером.*

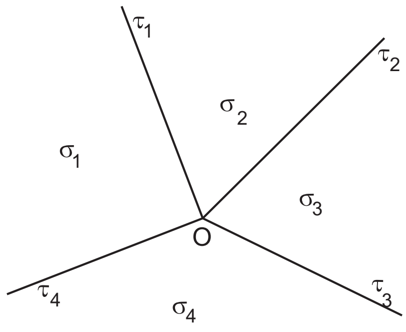


Рис. 10. Веер $\Sigma = \{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4,\ 0\}$

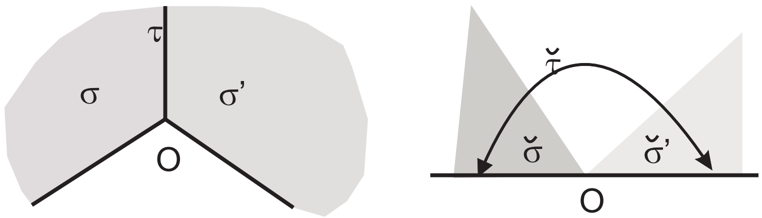


Рис. 11. Если два конуса делят ребро, то двойственные к ним прилегают к границе полуплоскости (как на рис. 8). Это дает возможность склеить соответствующие карты

**Определение 7.1.** Пусть $\sigma$ – конус. *Двойственным конусом* называется конус $\check{\sigma} := \{y : (\sigma, y) \geq 0\}$.

Докажите следующие утверждения:

**Лемма 7.2.**
- *Двойственный конус – выпуклый конус.*
- *Двойственный конус к лучу – полуплоскость.*
- *Двойственный конус к одноточечному конусу $\{O\}$ – плоскость.*
- *Для конуса с вершиной $\sigma$ двойственный конус $\check{\sigma}$ ограничен внешними перпендикулярами к сторонам $\sigma$.*
- *Если $\sigma$ регулярен, то $\check{\sigma}$ тоже регулярен.*

□

**Определение 7.3.** Пусть $K$ – выпуклый многоугольник. Построим внешние нормальные векторы к его сторонам, отложим их от начала координат. Полученный веер $\Sigma_K$ называется *внешним нормальным веером* многоугольника $K$.

Многоугольник и его веер комбинаторно двойственны: вершины многоугольника соответствуют двумерным конусам $\Sigma_K$, ребра многоугольника – одномерным конусам; две вершины соединены ребром, тогда и только тогда, когда соответствуюшие им конуса имеют общую сторону.

Совокупность двойственных конусов $\{\check{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma_K\}$ есть (с точностью до параллельного переноса и центральной симметрии) совокупность конусов,

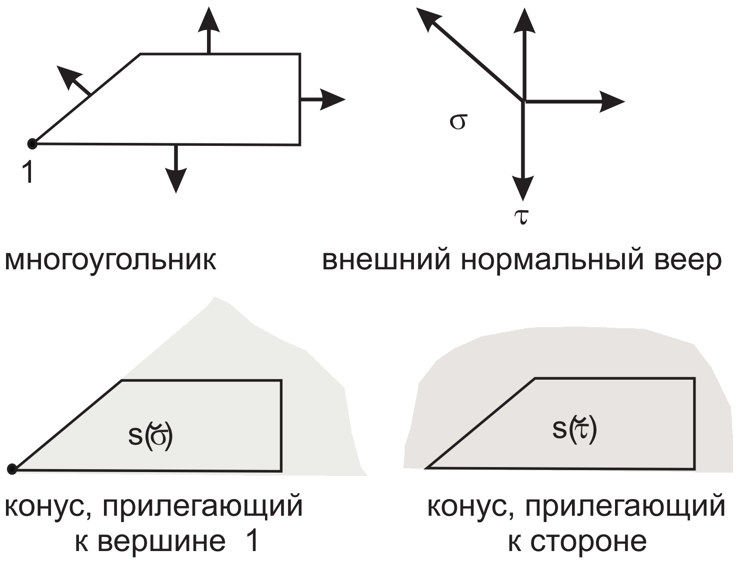


Рис. 12. Многоугольник, его внешний нормальный веер, и двойственные конуса, они же – конуса, прилегающие к вершинам и ребрам

прилегающих к вершинам и ребрам многоугольника $K$. Точнее, пусть $s$ – центральная симметрия относительно начала координат. На рис. 12 вершине 1 соответствует конус $\sigma$; при этом конус, прилегающий к вершине 1, есть параллельный перенос $s(\check{\sigma})$.

Аналогично, конус, прилегающий к ребру, есть параллельный перенос $s(\check{\tau})$.

## 8. Склеиваем несколько карт. Веер $\Sigma$ задает торическое многообразие $X_\Sigma$

Приведенную ниже конструкцию следует рассматривать как развернутое определение торического многообразия $X_\Sigma$.

Пусть $\Sigma$ – веер, порожденный $n$ лучами. Торическое многообразие $X_\Sigma$ клеится из карт $\{X_{\check{\sigma}} \mid \sigma \in \Sigma\}$.

Принцип склейки таков (собственно, он изложен в параграфе 6):

Пусть (двумерный) конус $\sigma$ принадлежат вееру, и пусть $\tau \subset \sigma$ – его грань. Это означает, что $\tau$ – либо один из лучей, ограничивающий конус $\sigma$, либо одноточечный конус $O$. Тогда

$$\check{\sigma} \subset \check{\tau},$$

причем расположение двойственных конусов такое, как в примере 6.1 или задаче 6.2. Значит, имеет место вложение торического квазиаффинного многообразия

$$X_{\check{\tau}} \subset X_{\check{\sigma}}.$$

Если есть два конуса $\sigma$ и $\sigma'$, то для их пересечения $\tau$ (которое – либо некоторый луч из веера, либо точка $O$), $X_{\check{\tau}}$ вкладывается и в $X_{\check{\sigma}}$, и в $X_{\check{\sigma'}}$.

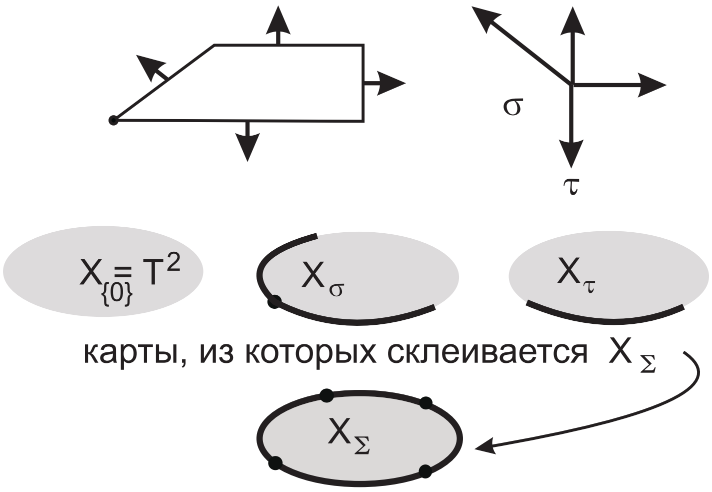


Рис. 13. Многоугольник, его веер, некоторые из карт, многообразие $X_\Sigma$. На рисунке видно, что комбинаторика $X_\Sigma$ повторяет комбинаторику исходного многоугольника

Поэтому все карты можно склеить между собой, и результат склейки называется *торическим многообразием* $X_\Sigma$.

Формально говоря, в определении участвуют карты $X_{\check{\sigma}}$, где $\sigma$ пробегает множество всех конусов веера. Однако как следует из конструкции, можно ограничиться лишь картами, соответствующими двумерным конусам.

Подытожим сказанное.

(1) Многообразие $X_\Sigma$ есть результат склейки нескольких карт (по крайней мере трех).
(2) Каждая из карт всюду плотна в $X_\Sigma$. Более того, пересечение всех карт – двумерный тор , он действует на каждой из карт, и действует на $X_\Sigma$.

    Поясним это еще раз, немного иначе чем прежде: всякий конус содержит $O$. Следовательно, торическое многообразие $X_\Sigma$ содержит $X_{\{\check{O}\}} = X_{\mathbb{C}^2}$. Но последнее и есть тор (см. Пример 4.6 ).
(3) Каждая из карт – аффинное торическое многообразие. Если каждый двумерный конус веера регулярен, то каждая из карт – аффинная комплексная плоскость.
(4) Функции склейки (они же – функции замены координат) являются мономами Лорана.
(5) $X_\Sigma$ можно получить из двумерного тора компактификацией, которая в данном случае означает приклеивание $n$ взаимно пересекающихся проективных прямых. Каждая такая прямая инвариантна при действии тора.

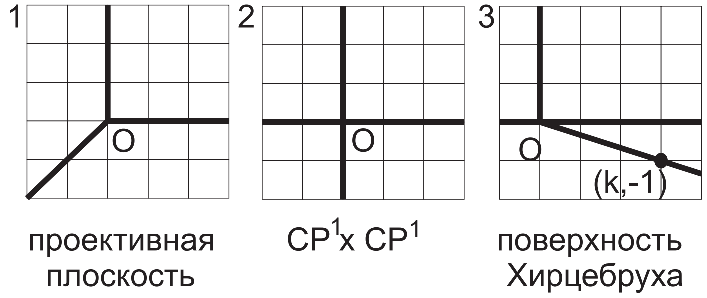


Рис. 14. Основные примеры вееров на плоскости

Конструкции этого параграфа можно повторить для старших размерностей, взяв $\mathbb{R}^n$ вместо $\mathbb{R}^2$. В старших размерностях к тору на бесконечности приклеиваются инвариантные подмногообразия коразмерности 1 – взаимно пересекающиеся торические многообразия. Так же, как и для размерности 2, структура орбит $X_\Sigma$ комбинаторно двойственна комбинаторике веера $\Sigma$. Это значит, что если $\Sigma$ – внешний нормальный веер некоторого многогранника $K$, то комбинаторика орбит совпадает с комбинаторикой $K$. Отметим интересное отличие многомерного от двумерного случая: в размерности 3 и выше не всякий веер является внешним нормальным веером некоторого многогранника.

**Примеры (см. рис. 14).**

(1) Первый веер задает проективную плоскость. Действительно, многообразие $X_\Sigma$ склеено из трех карт (так как при склейке можно ограничиться двумерными конусами), каждая карта – копия $\mathbb{C}^2$ (так как все конуса регулярны). Осталось разобраться в том, как устроены функции склейки. Для двух карт это уже проделано (см. пример 6.3); остальные пары проверяются совершенно аналогично (проделайте самостоятельно!).

(2) Второй веер задает $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$.

Мы знаем, что $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ покрывается четырьмя копиями $\mathbb{C}^2$ (см. задача 2.6). Многообразие $X_\Sigma$ тоже склеено из четырех копий $\mathbb{C}^2$, поэтому достаточно убедиться, что и функции склейки те же.

На рис. 15 представленны двойственные к двум из конусов. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ – образующие первого из них, $\mathbf{c}, \mathbf{b}$ – образующие второго конуса. Поскольку $\mathbf{a} = -\mathbf{c}$, то соответствующие системы координат $(u, v)$ и $(p, q)$ в двух картах-копиях $\mathbb{C}^2$ связаны соотношениями $v = q, u = 1/p$.

Этот пример отражает общий факт (для торических многообразий всех размерностей): произведение торических многообразий есть торическое многообразие, построенное по произведению вееров.

(3) Третий веер задает *поверхность Хирцебруха* $\mathcal{H}_k$.

Как следует из конструкции, $\mathcal{H}_k$ покрывается четырьмя копиями $\mathbb{C}^2$. Однако функции склейки иные, чем в предидущем примере.

**Задача.** Покажите, что поверхность, лежащая в $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2 = \{(x_0 : x_1), (y_0 : y_1 : y_2)\}$ и задаваемая уравнением $x_0^k y_0 = x_1^k y_1$, есть поверхность Хирцебруха.

Проверить это надо так: покрыть $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$ аффинными картами, показать, что пересечение поверхности с каждой из карт изоморфно $\mathbb{C}^2$, и

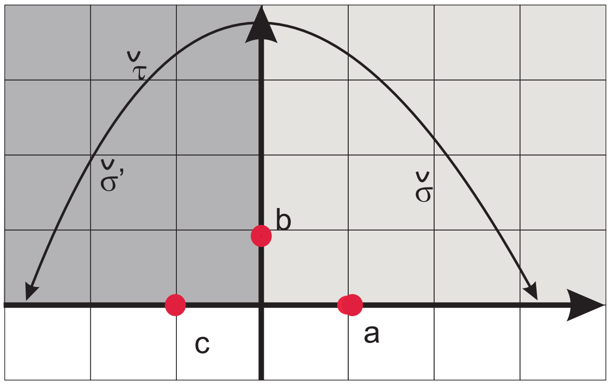


Рис. 15. Двойственные конуса для второго веера

найти функции склейки этих копий. Показать, что эти функции склейки именно таковы, какие продиктованы веером.

На этом построение торических многообразий закончено, и мы переходим к изучению соответствий между понятиями геометрии выпуклых многоугольников и алгебро-геометрическими понятиями.

## 9. Раздутие – измельчение веера – отрезание угла у многоугольника

**Определение 9.1.** (1) *Элементарным измельчением* веера $\Sigma$ называется новый веер $\Sigma'$, полученный разрезанием одного из конусов $\sigma \in \Sigma$ на 2 конуса.

(2) *Измельчением* веера $\Sigma$ называется новый веер $\Sigma'$, полученный из $\Sigma$ (возможно, пустой) цепочкой элементарных измельчений.

(3) Пусть $\Sigma$ – веер, состоящий из регулярных конусов. *Элементарным регулярным измельчением* веера называется новый веер $\Sigma'$, полученный разрезанием одного из конусов $\sigma \in \Sigma$ на 2 регуляных конуса.

(4) *Регулярным измельчением* веера $\Sigma$ называется новый веер $\Sigma'$, полученный из $\Sigma$ (возможно, пустой) цепочкой элементарных регулярных измельчений.

**Задача 9.2.** Покажите, что регулярный конус можно разрезать единственным способом на две регулярные части, см. рис. 16.

**Задача 9.3.** Покажите, что всякий конус можно разрезать на регулярные конуса.

Как меняется многообразие при элементарном регулярном измельчении веера? Произведем изменения в несколько шагов (см. рис. 17):

(1) Удалим из веера $\Sigma$ конус $\sigma$. Соответственно, из совокупности карт $X_\sigma$, склеенных в $X_\Sigma$, удалим карту $X_\sigma$. Из многообразия будет выколота ровна одна точка (одноточечная орбита). (Сравните с примером 6.3.)

(2) Добавим новый луч $\tau$. Это означает, что к многообразию приклеилась комплексная прямая без нуля.

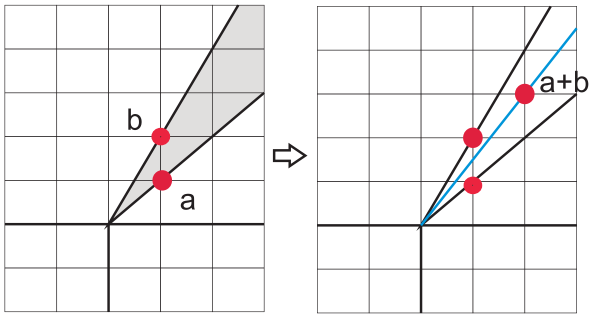


Рис. 16. Регулярный конус единственным способом разрезается на две регулярные части

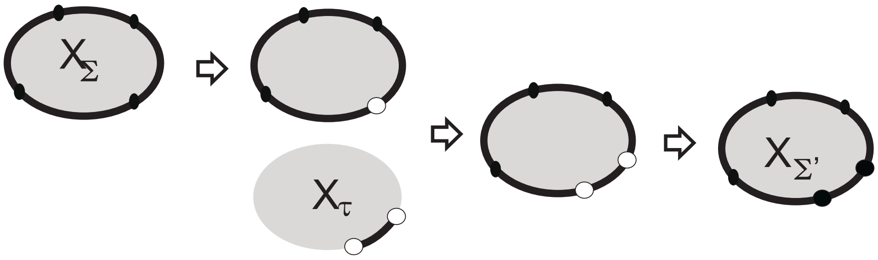


Рис. 17. Элементарное регулярное измельчение приводит к раздутию точки (точнее, одноточечной орбиты) на $X_\Sigma$

(3) Добавим новые двумерные конуса. К этой комплексной прямой добавились точки 0 и $\infty$. Многообразие $X_{\Sigma'}$ построено.

Если веер есть внешний нормальный веер некоторого многоугольника, то его элементарное регулярное измельчение соответствует отрезанию угла многогранника.

**Теорема 9.4.** *Всякое гладкое двумерное торическое многообразие можно получить цепочкой раздутий либо из проективной плоскости, либо из поверхности Хирцебруха.*

Идея доказательства такова: достаточно показать, что всякий регулярный веер есть регулярное измельчение либо веера 1, либо веера 3 (см. рис. 14). $\square$

Раздутие – общая процедура алгебраической геометрии, применимая не только к торическим многообразиям. Для торических многообразий она получает симпатичную геометрическую интерпретацию, которую мы только что рассмотрели.

Опишем раздутие независимо от торической структуры. Будем раздувать точку $0 \in \mathbb{C}^2$ (см. рис. 18). Мы хотим "выкинуть" ее и "вклеить вместо нее" проективную прямую. Положим

$$X = \{\text{множество пар } (l, x) : l - \text{прямая в } \mathbb{C}^2, \text{ проходящая через } 0,\ x - \text{точка на этой прямой.}\}.$$

Множество $X$ можно представить как подмножество $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 = \{((z_0 : z_1), (x_0, x_1))\}$, задаваемое уравнением $x_0 z_1 = x_1 z_0$.

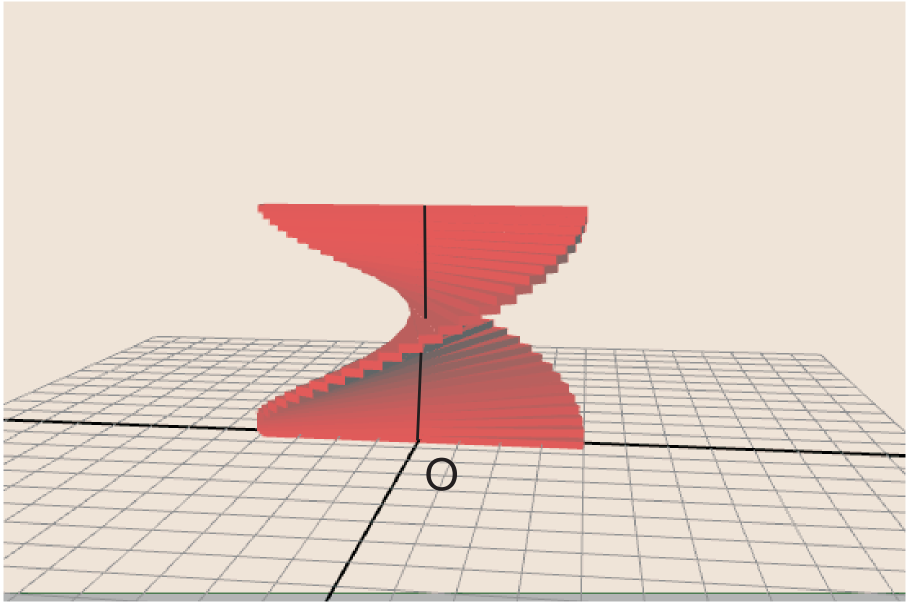


Рис. 18. Раздутие точки на плоскости. Верхний и нижний края спирали склеены, поэтому над точкой 0 висит проективная прямая, а над всеми остальными точками плоскости – ровно по одной точке.

Многообразие $\mathbb{C}^2 \setminus 0$ вкладывается в $X$: каждой точке $x$, поставим в соответствие пару ( прямая $0x$, точка $x$). Дополнение образа этого вложения есть проективная прямая. Ее образуют все пары типа (прямая, проходящая через 0, точка 0).

## 10. Структурный пучок

Пусть $U \subset X_\Sigma$ – открытое по Зарисскому квазиаффинное подмножество торического многообразия (например, одна из карт). Напомним, что с ним мы связали кольцо регулярных функций $R_U$ и поле рациональных функций $K_U$.

**Лемма 10.1.** *Поле $K_U$ не зависит от выбора $U$, поэтому можно говорить о поле рациональных функций $K_{X_\Sigma}$ многообразия $X_\Sigma$.*

Вместо доказательства проверим, что лемма верна для проективной прямой. Она покрыта двумя картами. Для первой карты $K_{U_1} = \{\frac{f(u)}{g(u)} \mid f,\ g\ -\text{полиномы}\}$. Для второй карты $K_{U_2} = \{\frac{f(p)}{g(p)}\} = \{\frac{f(1/u)}{g(1/u)}\}$. Несложно понять, что оба эти множества совпадают: например, функция $h = \frac{1/u+1+2/u^2}{1+1/u}$ (из второго множества) принадлежит и первому, так как $h = \frac{u+u^2+2}{u^2+u}$. □

Теперь можно определить кольцо регулярных функций для любого открытого $U \subset X_\Sigma$ (не обязательно квазиаффинного, например, им может быть $X_\Sigma$). Для квазиаффинных многообразий это определение совпадает с определением 5.4.

**Определение 10.2.** *Кольцом регулярных функций* на множестве $U$ называется следующее множество:

$R_U = \{f \in K_{X_\Sigma} \mid \text{функция } f \text{ определена на } U\}$.

Введем теперь чрезвычайно важное понятие.

**Определение 10.3.** *Структурным пучком* $O_{X_\Sigma}$ на $X_\Sigma$ называется правило, ставящее в соответствие каждому открытому множеству кольцо регулярных функций на нем:
$O_{X_\Sigma}(U) = R_U$.

**Лемма 10.4.** *Регулярными на всем многообразии* $X_\Sigma$ *являются только константы:* $O_{X_\Sigma}(X_\Sigma) = \mathbb{C}$.

Вместо доказательства проверим, что лемма верна для проективной прямой. Регулярная на всей проективной прямой функция $f$ должна быть регулярной и на первой карте, то есть $f$ обязана быть полиномом от $u$. Но она же должна быть регулярной и на второй карте, то быть полиномом от $p = 1/u$. Такая функция может быть только константой. □

Зачем нужно понятие пучка? Мы уже видели, что аффинное алгебраическое многообразие однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется кольцом регулярных функций. Кроме того, мы только что поняли, что для компактного торического многообразия это не так – у всех $X_\Sigma$ кольца регулярных функций изоморфны между собой. Зато структурные пучки – разные. Поэтому, чтобы различать компактные многообразия с помощью регулярных функций, понадобится более тонкая структура – пучок колец, а не кольцо.

В литературе понятие пучка задается некоторым набором аксиом (мы его здесь опустим). Для структурного пучка эти аксиомы превращаются в следующие простые свойства:

(1) "Хорошо определены гомоморфизмы ограничения:"
Для открытых множеств $U \subset V \subset X_\Sigma$ определен *гомоморфизм ограничения* $\varphi_{UV} : \mathcal{O}_{X_\Sigma}(V) \to \mathcal{O}_{X_\Sigma}(U)$, посылающий регулярную функцию, заданую на $V$, в ее ограничение на множество $U$. При этом для $U \subset V \subset W$ автоматически выполнено $\varphi_{UV} \circ \varphi_{VW} = \varphi_{UV}$.

(2) "Регулярную функцию можно склеивать из согласованных регулярных кусков" (см. рис. 19):
Пусть $f_1 \in \mathcal{O}_{X_\Sigma}(U_1)$, $f_2 \in \mathcal{O}_{X_\Sigma}(U_2)$. Пусть при этом тождественно равны ограничения $f_1|_{U_2} = f_2|_{U_1}$. Тогда существует единственный элемент $f \in \mathcal{O}_{X_\Sigma}(U_1 \cup U_2)$ , ограничения которого на $U_1$ и $U_2$ на равны соответственно $f_1$ и $f_2$.

## 11. Пучки модулей над структурным пучком

Начиная с этого параграфа и далее, будем считать, что $\Sigma$ – регулярный веер, то есть веер, составленный из регулярных конусов. Напомним, что в этом случае $X_\Sigma$ склеено из копий $\mathbb{C}^2$.

Пусть $U = X_{\check\sigma}$– одна из стандартных карт многообразия $X_\Sigma$. Будем рассматривать модули над $R_{\check\sigma} = \mathcal{O}_{X_\Sigma}(X_{\check\sigma})$, причем такие, которые являются подмножеством поля $K_{X_\Sigma}$.

Все модули, которые у нас появятся, будут иметь следующий вид:

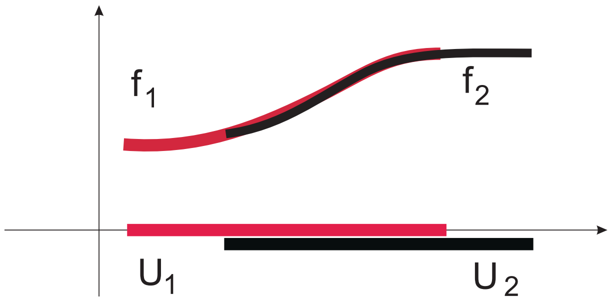


Рис. 19. Регулярную функцию можно склеивать из согласованных кусков

**Пример 11.1.** *Модуль над $R_{\check\sigma}$, порожденный сдвигом конуса $\check\sigma$.*

*Пусть $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^2$. Определим сдвинутый конус $\check\sigma + \boldsymbol{m} = \{x + m \mid x \in \check\sigma\}$ и множество полиномов Лорана*

$$\mathcal{F}_{\check\sigma,\boldsymbol{m}} = \{f \in \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}^{-1}] \mid supp\ f \in \check\sigma + \boldsymbol{m}\}.$$

*Это множество – модуль над кольцом $R_{\check\sigma} = \mathcal{O}_{X_\Sigma}(X_{\check\sigma})$.*

При этом тензорное произведение двух модулей такого типа над кольцом $R_{\check\sigma}$ – тоже модуль, поржденный суммарным сдвигом:

$$\mathcal{F}_{\check\sigma,\ \mathbf{m}_1} \otimes_{R_{\check\sigma}} \mathcal{F}_{\check\sigma,\ \mathbf{m}_2} = \mathcal{F}_{\check\sigma,\ \mathbf{m}_1+\mathbf{m}_2}.$$

Это свойство вполне можно временно использовать в качестве определения тензорного произведения, если читатель не знаком с таковым.

Запишем иначе определение модуля $\mathcal{F}_{\check\sigma,\mathbf{m}}$ и формулу для тензорного произведения:

$$\mathcal{F}_{\check\sigma,\mathbf{m}} = \mathbf{z}^{\mathbf{m}}\mathcal{O}_{X_\Sigma}(X_{\check\sigma}),$$

$$\mathcal{F}_{\check\sigma,\ \mathbf{m}_1} \otimes_{R_{\check\sigma}} \mathcal{F}_{\check\sigma,\ \mathbf{m}_2} = \mathbf{z}^{\mathbf{m}_1}\mathbf{z}^{\mathbf{m}_2}\mathcal{O}_{X_\Sigma}(X_{\check\sigma}) = \mathbf{z}^{\mathbf{m}_1+\mathbf{m}_2}\mathcal{O}_{X_\Sigma}(X_{\check\sigma}).$$

**Определение 11.2.** *Пучком модулей $\mathcal{F}$ над структурным пучком $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$* на $X_\Sigma$ (или пучком $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$-модулей) называется правило, ставящее в соответствие каждому открытому $U \subset X_\Sigma$ некоторый модуль $\mathcal{F}(U)$ над кольцом $R_U = \mathcal{O}_{X_\Sigma}(U)$.

При этом должны выполняться следующие условия (видоизмененные аксиомы пучка):

- "Можно брать ограничения":
  Пусть $V \subset U$, $f \in \mathcal{F}(U)$. Тогда ограничение функции $f$ на множество $V$ принадлежит модулю $\mathcal{F}(V)$.
- "Можно склеивать согласованные куски":
  Пусть $f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$, $f_2 \in \mathcal{F}(U_2)$. Пусть при этом тождественно равны ограничения $f_1|_{U_2} = f_2|_{U_1}$. Тогда существует единственный элемент $f \in \mathcal{F}(U_1 \cup U_2)$, ограничения которого на $U_1$ и на $U_2$ равны соответственно $f_1$ и $f_2$.

  Собственно говоря, если две рациональные функции совпадают на некотором открытом множестве, то они вообще тождественно равны.

Содержательная часть этой аксиомы – существование – утверждает, что эта функция обязана принадлежать модулю $\mathcal{F}(U_1 \cup U_2)$.

По некоторым причинам (о которых мы умолчим), говоря о пучках над торическим многообразием, не обязательно рассматривать все множества $U$, а можно ограничиться лишь стандартными картами $X_{\check{\sigma}}$. Точнее, если заданы значения пучка (и проверены аксиомы) для стандартных карт, то на остальные $U$ пучок распространяется автоматически.

**Пример 11.3.** *Простейшие примеры.*

(1) *Структурный пучок* $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$ *есть пучок* $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$*-модулей.*

(2) *Тривиальный пучок.*

*Зафиксируем* $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^2$. *Тогда* $\mathcal{F}(U) = \boldsymbol{z}^{\mathbf{m}}\mathcal{O}_{X_\Sigma}(U)$ *есть пучок* $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$*-модулей. Его образуют модули, порожденные одновременным сдвигом всех конусов на* $\boldsymbol{m}$*. Когда появится понятие изоморфизма, мы покажем, что этот пучок изоморфен структурному пучку.*

(3) *Тензорное произведение двух пучков* $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$*-модулей – пучок. Оно определяется естественным способом:*

$$(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)(U) := \mathcal{F}_1(U) \otimes \mathcal{F}_2(U).$$

**Задача 11.4.** Убедитесь, что $\mathcal{O}_{X_\Sigma} \otimes \mathcal{O}_{X_\Sigma} = \mathcal{O}_{X_\Sigma}$.

**Пучок модулей, порожденный системой сдвинутых конусов.** Попробуем построить пучок $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$-модулей, поставив каждой карте $X_{\check{\sigma}}$ в соответствие модуль, порожденный некоторым сдвигом конуса $\check{\sigma}$. Если мы сдвинем все конуса на один и тот же вектор $\mathbf{m}$, то получим тривиальный пучок (см. (2) в примере 11.3).

Однако конуса можно сдвигать на разные вектора, заботясь при этом о выполнении аксиом. Рассмотрим для начала всего три конуса – соседние конуса $\sigma, \sigma'$ и их общий луч $\tau$.

**Пример 11.5.** *Сдвиг 1 (на рис. 20) порождает некоторый пучок модулей.*

**Пример 11.6.** *Сдвиг 2 порождает некоторый другой пучок модулей (ниже мы увидим, что у этих двух пучков разные глобальные сечения, а значит и пучки тоже разные).*

**Пример 11.7.** *Сдвиг 3 не порождает пучка. Действительно, в сдвиге конуса* $\check{\sigma}$ *есть целая точка* $\mathbf{m}$*, не принадлежащая сдвигу конуса* $\check{\tau}$*. Это значит, что в* $\mathcal{F}(X_{\check{\sigma}})$ *есть функция* $\boldsymbol{z}^{\mathbf{m}}$*, ограничение которой на* $X_{\check{\tau}}$ *не принадлежит модулю* $\mathcal{F}(X_{\check{\tau}})$*.*

**Пример 11.8.** *Сдвиг 4 порождает некоторый пучок, но этот пучок не обратим(см. ниже).*

**Определение 11.9.** Два пучка $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$-модулей $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$(на одном и том же многообразии) называются *изоморфными*, если для всякого открытого $U$ имеется изоморфизм $\varphi_U$, связывающий $\mathcal{F}_1(U)$ и $\mathcal{F}_2(U)$, который согласован с гомоморфизмами ограничения. А именно, мы требуем, чтобы для всех пар открытых множеств $V \subset U$ следующая диаграмма была коммутативна:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_U: & \mathcal{F}_1(U) & \to & \mathcal{F}_2(U) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ \varphi_V: & \mathcal{F}_1(V) & \to & \mathcal{F}_2(V) \end{array}$$

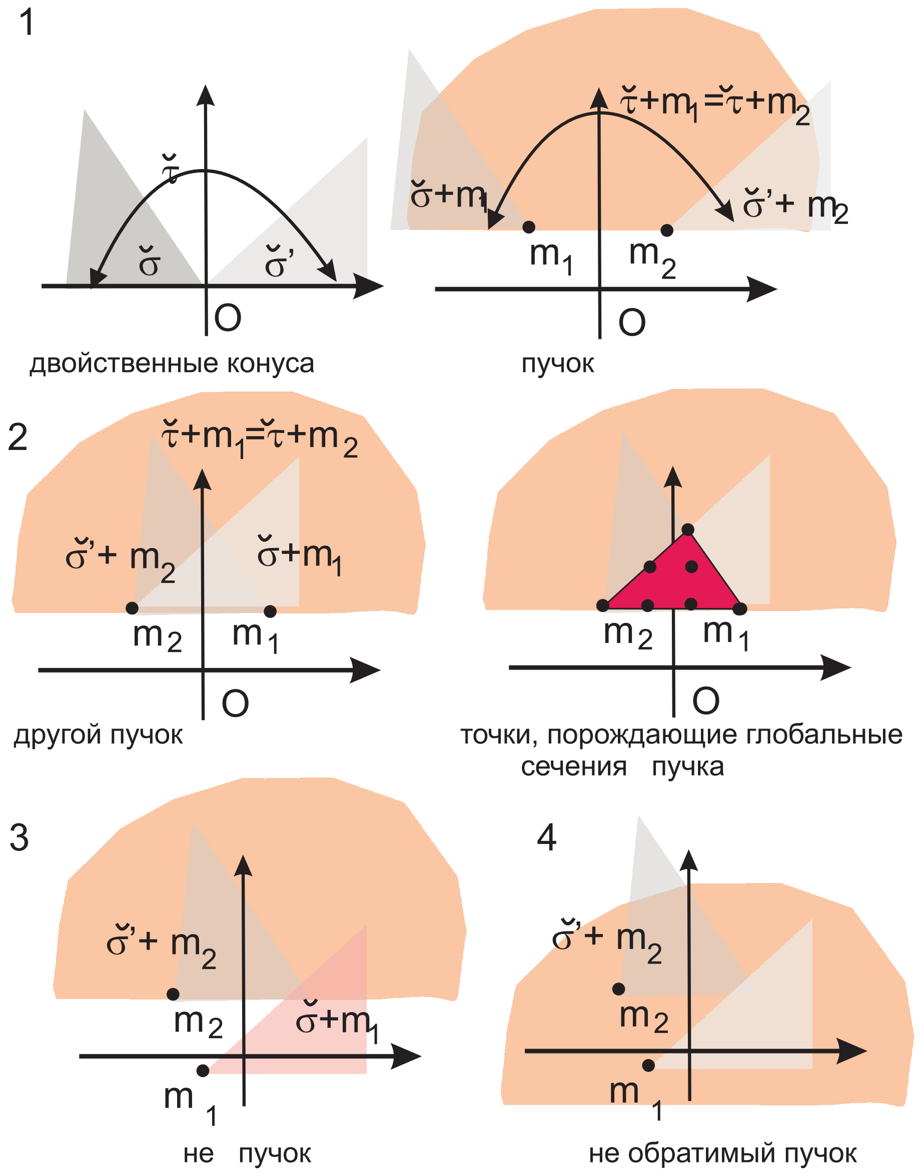


Рис. 20. Некоторые варианты сдвигов конусов

(Вертикальные стрелки – гомоморфизмы ограничения.)

**Пример 11.10.** *Тривиальный пучок изоморфен структурному пучку. В качестве изоморфизма $\varphi_U$ (независимо от $U$) служит умножение на $z^m$.*

**Определение 11.11.** Пучок $\mathcal{F}$ называется *обратным* к пучку $\mathcal{G}$, если тензорное произведение $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ изоморфно структурному пучку.

В этом случае оба пучка называются *обратимыми*, и будем писать $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1}$.

В силу стандартных алгебраических соображений, обратимые пучки (взятые с точностью до изоморфизма) образуют группу. Единичным элементом в ней служит структурный пучок.

**Теорема 11.12.** *Пусть для каждого конуса $\sigma$ веера $\Sigma$ зафиксирована некоторая точка решетки $\boldsymbol{m}_\sigma$. Рассмотрим систему сдвинутых конусов $\boldsymbol{m}_\sigma+\check{\sigma}$ и правило $\mathcal{F}_{\{\boldsymbol{m}_\sigma\}}$, сопоставляющее каждой карте $X_{\check{\sigma}}$ модуль $\mathcal{F}_{\check{\sigma},\boldsymbol{m}_\sigma}$. Верно следующее:*

(1) *$\mathcal{F}_{\{\boldsymbol{m}_\sigma\}}$ однозначно дополняется до обратимого пучка тогда и только тогда, когда для любых двух соседних двумерных конусов $\sigma$ и $\sigma'$выполнено условие*

$$\boldsymbol{m}_\sigma - \boldsymbol{m}_{\sigma'} \perp \tau,$$

*где $\tau = \sigma \cap \sigma'$.*

*Точнее, чтобы задать обратимый пучок такого типа, достаточно задать сдвиги $\boldsymbol{m}_\sigma$ для всех двумерных конусов $\sigma$. Тогда сдвиги $\boldsymbol{m}_\tau$ будут определены автоматически, см. рис. 20.*

(2) *При тензорном произведении двух таких пучков сдвиги $\boldsymbol{m}_\sigma$ складываются:*

$$\mathcal{F}_{\{\boldsymbol{m}_\sigma\}} \otimes \mathcal{F}_{\{\boldsymbol{m'}_\sigma\}} = \mathcal{F}_{\{\boldsymbol{m}_\sigma+\boldsymbol{m'}_\sigma\}}$$

(3) *Обратным к пучку $\mathcal{F}_{\{\boldsymbol{m}_\sigma\}}$ является пучок $\mathcal{F}_{\{-\boldsymbol{m}_\sigma\}}$*

(4) *Пучки $\mathcal{F}_{\{\boldsymbol{m}_\sigma\}}$ и $\mathcal{F}_{\{\boldsymbol{m}_\sigma+\boldsymbol{m}\}}$ изоморфны.*

(5) *Всякий выпуклый многоугольник, внешний нормальный веер которого равен $s(\Sigma)$, задает обратимый пучок на $X_\Sigma$.*

*Другими словами, сдвиги $\boldsymbol{m}_\sigma$ – вершины многоугольника.*

(6) *Выпуклые многоугольники, отличающиеся на перенос, задают изоморфные пучки.*

Доказательство.

(1) Мы проверили (см. рис. 20), что для задания обратимого пучка необходимо и достаточно, чтобы сдвиги конусов $\check{\sigma}$ и $\check{\sigma'}$ содержались в конусе $\check{\tau}$, прилегая к его границе. Легко убедиться, что это равносильно условию $\mathbf{m}_\sigma - \mathbf{m}_{\sigma'} \perp \tau$.

(2) Это прямо следует из определения тензорного произведения.

(3) Это следует из предыдущего пункта:

$$\mathcal{F}_{\{\mathbf{m}_\sigma\}} \otimes \mathcal{F}_{\{-\mathbf{m}_\sigma\}} = \mathcal{F}_{\{\mathbf{0}\}} = \mathcal{O}_{X_\Sigma}.$$

(4) Эти два пучка отличаются на тривиальный пучок.

(5) Действительно, система конусов при вершинах и ребрах выпуклого многоугольника (см. рис. 12) удовлетворяет условию ортогональности пункта (1). Точнее, конуса при вершинах и ребрах устроены так, как на рис. 20, 2.

(6) Если два выпулых многоугольника отличаются на перенос, то соответствующие системы сдвинутых конусов тоже отличаются на общий перенос. Это значит, что пучки отличаются на тривиальный пучок. □

Эта теорема мотивирует следующее определение.

**Определение 11.13.** Пусть $\Sigma$ – регулярный веер.

(1) *Согласованной системой сдвинутых конусов, подчиненной вееру* $\Sigma$

называется набор $\{\mathbf{m}_\sigma + \check{\sigma}\}$ (где $\sigma$ пробегает множество всех двумерных конусов веера), если для любых двух соседних двумерных конусов $\sigma$ и $\sigma'$выполнено условие

$$\mathbf{m}_\sigma - \mathbf{m}_{\sigma'} \perp \tau,$$

где $\tau = \sigma \cap \sigma'$ (см. рис. 20).

(2) *Комбинаторной группой Пикара* $CP(\Sigma)$ называется множество всех согласованных систем сдвинутых конусов, профакторизованное по параллельным переносам. (Иными словами, мы отождествляем две системы конусов, если они отличаются на общий параллельный перенос).

(3) *Группой Пикара* $Pic(X_\Sigma)$ многообразия $X_\Sigma$ называется группа всех обратимых пучков, порожденных согласованными системами конусов. При этом мы отождествляем изоморфные копии пучков.

(Примечание: за рамками курса мы оставили важный факт: других обратимых пучков на $X_\Sigma$ нет.)

**Теорема 11.14.** *Комбинаторная группа Пикара изоморфна группе Пикара:* $CP(\Sigma) \cong Pic(X_\Sigma)$. □

Посмотрим повнимательнее на систему сдвинутых конусов (и на пучок), порожденный выпуклым многоугольником. Для выпуклого многоугольника сдвинутые конуса при соседних вершинах всегда расположены так, как показано на рис. 20, 2 и никогда так, как на рис. 20, 1.

Тем не менее расположение 20, 1 встречается (см. задача ниже). Это значит, что не все обратимые пучки задаются выпуклыми многоугольниками.

**Задача 11.15.** Треугольник (см. рис. 21, слева) порождает согласованную систему сдвинутых конусов, а значит, и пучок $\mathcal{F}$ на проективной плоскости.

Убедитесь, что система сдвинутых конусов (см. рис. 21, справа) порождает пучок $\mathcal{F}^{-1}$. Проверьте, что пучок $\mathcal{F}^{-1}$ не связан ни с каким выпуклым многоугольником.

Напомним, что уже традиционно мы обозначаем через $\tau_i$ одномерные конуса веера, а через $\sigma_i$ – двумерные. Согласно определению, виртуальный многогранник задается сдвигами конусов, двойственных к $\sigma_i$. Действительно, если заданы сдвиги сдвиги $\check{\sigma}_i$, то сдвиги $\check{\tau}_i$ (то есть сдвиги полуплоскостей) определяются однозначно. Но можно поступить наоборот: задать сдвиги конусов типа $\check{\tau}_i$, и тогда сдвиги $\check{\sigma}_i$ будут определены однозначно. Движения полуплоскостей $\check{\tau}_i$ мы будем называть *движением стенок.* При этом графически каждую полуплоскость будем изображать в виде прямой (ее границы) и нормального к прямой вектора (указывающего нужную полуплоскость). Пример приведен на рисунке 21.

## 12. Сумма Минковского. Группа виртуальных многоугольников. Соответствие "обратимый пучок – виртуальный многоугольник"

*Выпуклым многоугольником* на плоскости мы называем выпуклую оболочку непустого конечного множества точек. Важно, что у нас точка и отрезок тоже считаются многоугольниками.

Мы рассматриваем только *решеточные многогранники*, то есть такие, все вершины которых лежат в $\mathbb{Z}^2$.

Превратим множество выпуклых многоугольников в полугруппу, задав на нем операцию сложения по Минковскому.

**Определение 12.1.** Пусть $K$ и $L$ – выпуклые многоугольники. Их *суммой Минковского* называется множество точек

$K + L = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} |\ \mathbf{x} \in K,\ \mathbf{y} \in L\}.$

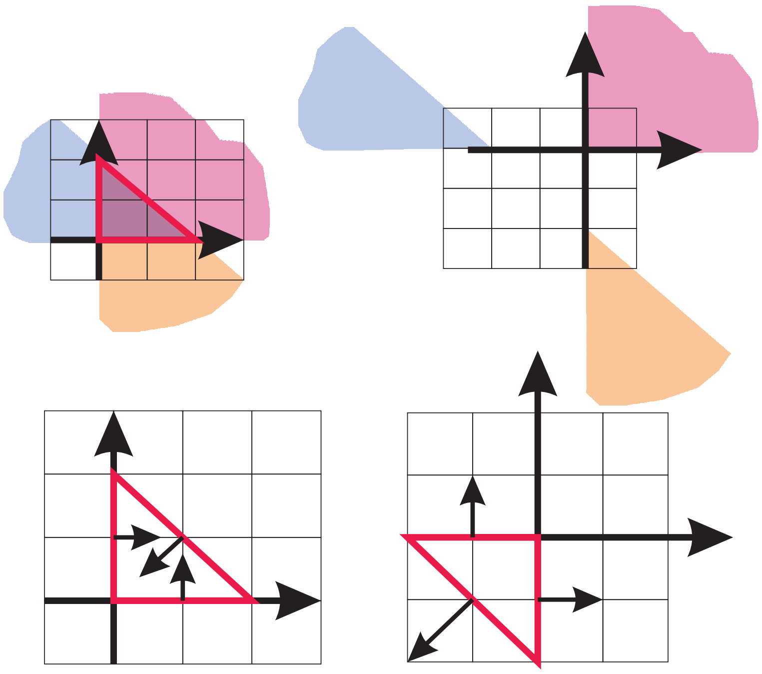

Рис. 21. Вверху: два взаимно обратнах виртуальных многогранника как две системы сдвинутых конусов. Первый порожден выпуклым треугольником. Внизу: та же система сдвинутых конусов, но задаваемая сдвигами стенок

Вот простейшие свойства суммы Минковского.

(1) Сумма двух многоугольников – выпуклый многоугольник.
(2) Если один из многоугольников, скажем $L = \{a\}$, – одноточечный, то $K + L$ – параллельный перенос многоугольника $K$ на вектор $a$.
(3) Одноточечный многоугольник $\mathcal{O} = \{O\}$ играет роль "нуля": сумма $K+\mathcal{O}$ всегда равна $K$.
(4) Если слагаемые $K$ и $L$ переместить с помощью параллельных переносов $u$ и $t$, то их сумма перенесется параллельно на вектор $u + t$.

    Поэтому имеет смысл отождествлять многоугольники, отличающиеся на параллельный перенос. Или иначе, когда мы вычисляем сумму Минковского, мы можем поместить начало координат туда, куда нам удобно (как правило, удобно в вершину одного из многоугольников.
(5) Для поворотов предыдущее утверждение неверно. Если повернуть одно из слагаемых, сумма изменится уже существенно.

**Пример 12.2.** (1) *Сумма Минковского двух непараллельных отрезков – параллелограмм.*
(2) *Сумма Минковского двух параллельных отрезков – отрезок суммарной длины.*
(3) *Сумма Минковского треугольника и отрезка, параллельного одной из сторон – трапеция.*

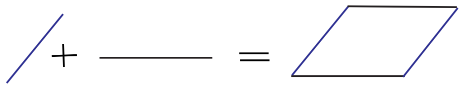

Рис. 22

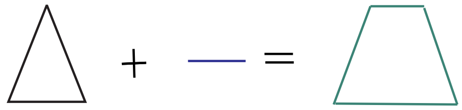

Рис. 23

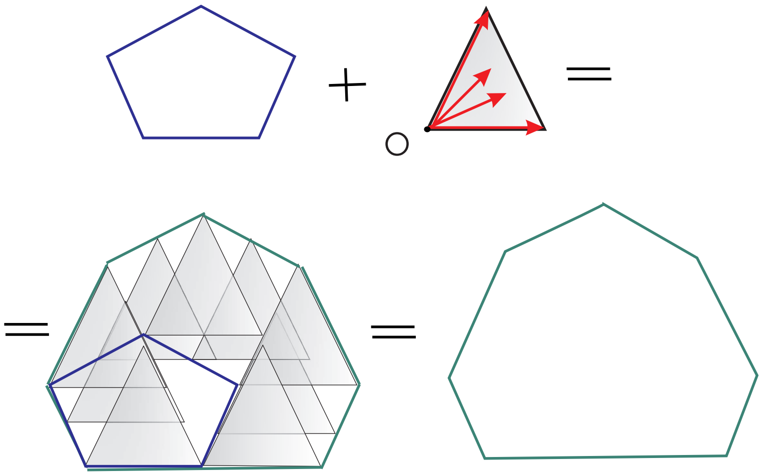

Рис. 24

(4) *Еще один пример – сумма пятиугольника и треугольника (см. рис. 24). В данном случае это семиугольник. Однако если чуть повернуть треугольник (а пятиугольник оставить прежним), то суммой будет восьмиугольник, т. к. параллельные стороны пятиугольника и треугольника перестанут быть параллельными.*

**Задача 12.3.** *Пусть $K$ – выпуклый многоугольник. Убедитесь, что $K+K$ есть многоугольник $K$, растянутый гомотетией в 2 раза.*

**Определение 12.4.** Будем говорить, что выпуклый многоугольник $K$ *подчинен вееру* $\Sigma$, если $\Sigma$ – измельчение его внешнего нормального веера $\Sigma_K$.

**Лемма 12.5.** (1) *Сумма Минковского двух многоугольников, подчиненных вееру $\Sigma$, также подчинена $\Sigma$.*
(2) *Сложение Минковского соответствует сложению систем сдвинутых конусов $s(\Sigma)$.*

Поэтому всякий выпуклый многоугольник можно отождествить с порожденной им системой выпуклых конусов.

Теперь попробуем понять, как нам определить вычитание Минковского. Это сделать невозможно, если ограничить себя только выпуклыми многоугольниками. Действительно, при сложении многоугольники не становятся меньше (точнее говоря, сумма $K$ и $L$ содержит параллельный перенос каждого из слагаемых

– это хорошо видно на рис. 24). Поэтому вычесть из маленького многоугольника большой невозможно.

Если взять определение суммы и попробовать помудрить с ним, приспособив для вычитания, то ничего хорошего не выйдет (попробуйте!).

Возможен формальный подход – переход к группе Гротендика: полугруппа выпуклых многоугольников подчиненных вееру $\Sigma$ вкладывается в группу формальных разностей Минковского, которую мы обозначим через $\mathcal{P}(\Sigma)$ и будем называть *группой виртуальных многоугольников*, подчиненных вееру $\Sigma$.

Однако нам хочется иметь дело не с формальными разностями, а с геометрическими объектами.

Придать геометрический смысл формальным разностям можно например так:

**Лемма 12.6.** *Группа виртуальных многоугольников изоморфна комбинаторной группе Пикара:*

$$CP(\Sigma) \cong \mathcal{P}(s(\Sigma)).$$

*Изоморфизм посылает каждый выпуклый многоугольник в порожденную им систему сдвинутых конусов.* □

## 13. Сечения пучка. Соответствие "целая точка многогранника ↔ глобальное сечение пучка"

**Определение 13.1.** Для пучка $\mathcal{F}$ на многообразии $X_\Sigma$ и открытого множества $U \subset X$, всякий элемент $f \in \mathcal{F}(U)$ называется *сечением* пучка $\mathcal{F}$ над $U$.

Сечения пучка $\mathcal{F}$ над $X_\Sigma$ называются *глобальными сечениями.*

Вспомним, что всякое сечение пучка – это некоторая рациональная функция, элемент поля $K_{X_\Sigma}$.

**Пример 13.2.**
(1) *Глобальные сечения структурного пучка – постоянные функции.*
(2) *Рассмотрим многообразие, являющееся склейкой только двух карт $X_\sigma$ и $X_{\sigma'}$ (см. рис. 20) и два пучка на нем, порожденные сдвинутыми конусами 1 и 2.*
   - *В случае 2 каждая точка $\boldsymbol{m}$, лежащая в пересечении конусов $\boldsymbol{m}_1+\check{\sigma}$ и $\boldsymbol{m}_2+\check{\sigma}'$ (то есть в красном треугольнике) порождает глобальное сечение пучка $\mathcal{F}$, поскольку $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{F}(X_\sigma)$ и $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}} \in \mathcal{F}(X_{\sigma'})$.*
   - *Для пучка 1 конуса $\boldsymbol{m}_1 + \check{\sigma}$ и $\boldsymbol{m}_2 + \check{\sigma}'$ не пересекаются, поэтому множество глобальных сечений пусто.*
(3) *Рассмотрим теперь общий случай: пусть пучок на $X_\Sigma$ порожден выпуклым многоугольником $K$. Пересечение сдвинутых конусов есть в точности $K$, поэтому множество глобальных сечений порождено мономами $\{\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{m}} \mid \boldsymbol{m} \in K\}$. Иначе говоря, множество глобальных сечений совпадает с множеством $\{f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] \mid supp\ f \subset K.\}$*

## 14. Дивизоры. Соответствие "дивизор – обратимый пучок – виртуальный многоугольник"

**Определение 14.1.** *Простым дивизором $D \subset X$* называется замкнутое алгебраическое подмногообразие коразмерности 1 алгебраического многообразия $X$.

Соответственно, дивизор на $X_\Sigma$ – замкнутая алгебраическая кривая на $X_\Sigma$.

*П*ростой дивизор называется *инвариантным*, если он инвариантен под под действием тора. Иными словами, простые инвариантные дивизоры это проективные прямые, дополняющие $T^2$.

**Пример 14.2.** (1) *Любая проективная прямая на проективной плоскости – дивизор. Простых инвариантных дивизоров на проективной плоскости всего 3.*
(2) *На проективной прямой простой дивизор – точка.*

**Определение 14.3.** *Дивизором Вейля* называется формальная сумма простых дивизоров $D = \sum n_i D_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}$.

Иными словами, дивизор Вейля есть набор кривых, взятых с некоторыми целыми (возможно, отрицательными) весами.

Дивизор называется *инвариантным*, если он инвариантен под действием тора.

Дивизоры Вейля образуют группу относительно операции формального сложения.

**Определение 14.4.** Дивизор $D = \sum n_i D_i$ называется *эффективным* (будем писать при этом $D \geq 0$), если все $n_i \geq 0$.

**Определение 14.5.** Пусть $f$ – рациональная функция на $X_\Sigma$. У нее есть нули и полюса – и то, и другое представимо набором кривых (то есть простых дивизоров) с некоторыми кратностями (соответствующими кратности полюса или нуля). Свяжем с $f$ дивизор:

$$(f) = \sum n_{D,f} D$$

Здесь $D$ пробегает множество нулей и полюсов функции $f$, коэффициент $n_{D,f}$ равен степени нуля или минус степени полюса. Такой дивизор называется *главным*.

Два дивизора *линейно эквивалентны*, если их разность – главный дивизор.

Главные дивизоры образуют подгруппу в группе всех дивизоров, так как $(fg) = (f)+(g)$. Факторгруппу всех дивизоров по главным дивизорам обозначим через $Div(X_\Sigma)$.

**Пример 14.6.** *Найдем группу $Div$ для проективной прямой. Всякий дивизор по определению есть конечный набор точек с кратностями. Пусть $f$ – полином. У него есть несколько корней и полюс на бесконечности. Сумма степеней корней (с учетом кратности) равна, как известно, степени полинома. Зннaчит, главный дивизор $(f)$ таков, что сумма всех кратностей $\sum n_i$ равна нулю. Очевидно, это же свойство выполнено для всякой рациональной функции. Наоборот, легко показать, что всякий дивизор, для которого $\sum n_i = 0$ – главный. Следовательно, $Div(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{Z}$.*

**Теорема 14.7.** *Для гладкого торического многообразия $X_\Sigma$ группа $Div(X_\Sigma)$ изоморфна группе Пикара $Pic(X_\Sigma)$.*

Доказательство. Построим явно изоморфизм между этими группами.

1. Пусть $\mathcal{F}$ – обратимый пучок. Построим соответствующий ему дивизор, склеив его из кусочков. Возьмем одну из карт $X_{\check{\sigma}}$. Для этой карты верно $\mathcal{F}(X_{\check{\sigma}}) =$

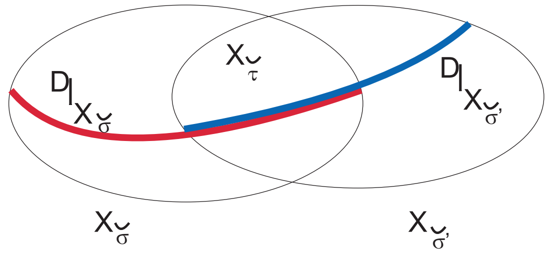


Рис. 25. Склеиваем дивизор из кусочков. На самом деле картинка обманчива: всегда получается инвариантный дивизор

$\mathbf{z}^{\mathbf{m}_\sigma}\mathcal{O}_{X_\Sigma}(X_\sigma)$ (напомним: мы считаем, что иных пучков у нас просто нет). Зададим ограничение дивизора $D$ как $D|_{X_{\check\sigma}} = -(\mathbf{z}^{\mathbf{m}_\sigma})|_{X_{\check\sigma}}$. Иными словами, мы взяли кусочек некоторого главного дивизора (он изображен красным на рис. 25).

Будем брать карты одну за другой. Покажем, что кусочки согласованы между собой, то есть $D|_{X_{\check\sigma}} \cap X_{\check\tau} = D|_{X_{\check\sigma'}} \cap X_{\check\tau}$. (см. рис. 25) Действительно, $\mathcal{F}(X_{\check\tau}) = \mathbf{z}^{\mathbf{m}_\sigma}\mathcal{O}_{X_\Sigma}(X_{\check\tau}) = \mathbf{z}^{\mathbf{m}_{\sigma'}}\mathcal{O}_{X_\Sigma}(X_{\check\tau})$. Иначе говоря, согласно конструкции, $\mathbf{z}^{\mathbf{m}_\sigma}$ и $\mathbf{z}^{\mathbf{m}_{\sigma'}}$ отличаются на множитель, который обратим на $X_{\check\tau}$. Это значит, что нули и полюса функций $\mathbf{z}^{\mathbf{m}_\sigma}$ и $\mathbf{z}^{\mathbf{m}_{\sigma'}}$ на $X_{\check\tau}$ совпадают, что и требовалось доказать.

Проверим, что если два пучка $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ изоморфны, то соответствующие им дивизоры линейно эквивалентны.

Действительно, в этом случае $\mathcal{F} = \mathbf{z}^{\mathbf{m}}\mathcal{F}'$ для некоторого $m$, и следовательно, построенные дивизоры отличаются на слагаемое $-(\mathbf{z}^{\mathbf{m}})$. Обратите внимание, что в результате всегда получится инвариантный дивизор.

2. Покажем, что это построение обратимо: для любого дивизора $D$ найдется ему линейно эквивалентный, получающийся из некоторого обратимого пучка (или, что то же самое, из некоторой согласованной системы сдвинутых конусов).

Шаг 1. "Выгоняем дивизор $D$ на бесконечность".

Покажем, что $D$ линейно эквивалентен некоторому инвариантному дивизору. Подберем такую рациональную функцию $f$, что ограничение дивизора $(f)+D$ на тор $T^2$ равно нулю. Это легко сделать, так как каждая из кривых, составляющих дивизор, на торе задается некоторым полиномиальным уравнением. В качестве $f$ надо взять произведение этих полиномов с подходящими степенями.

Шаг 2. "Двигаем стенки".

Итак, можно считать, что $D = \sum n_i D_i$, где $D_i$ – простые инвариантные дивизоры, то есть те проективные прямые, которые приклеены к тору при его компактификации.

Чтобы построить обратимый пучок, достаточно построить систему сдвинутых конусов. А для этого достаточно указать, на сколько должны быть сдвинуты стенки (по отношению к положению, когда стенка содержит начало координат). Правило таково: стенку, соответствующую дивизору $D_i$, надо сдвинуть на расстояние $n_i$. Причем расстояние измеряется таким образом: берутся все прямые, параллельные данной, которые содержат целые точки. Они образуют дискретное множество, их мы и отсчитываем (см. рис. 26). $\square$

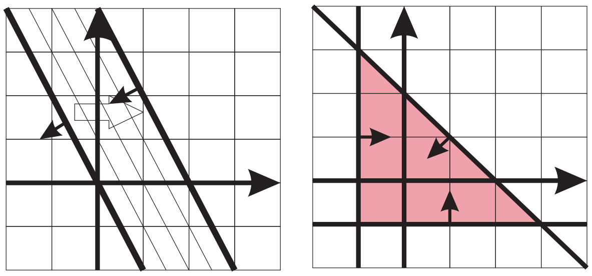


Рис. 26. Многоугольник можно задать движением стенок

## 15. Смешанные объемы

**Определение 15.1.** (Определение-теорема) Пусть $K_1, K_2$ – выпуклые многоугольникики, $V$ – 2-мерный объем (то есть площадь), $\lambda_1, \lambda_2$ – положительные числа. Тогда при фиксированных $K_1, K_2$, функция $V(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)$ является однородным полиномом степени 2 от переменных $\lambda_1, \lambda_2$. Его коэффициент при $\lambda_1\lambda_2$ называется *смешанным объемом* и обозначается $V(K_1, K_2)$.

Рисунок 27 иллюстрирует факт полиномиальности: линейную комбинацию $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$ можно разрезать на части следующих трех видов:

- $\lambda_1 K_1$. Площадь этой части пропорциональна $\lambda_1^2$.
- Несколько частей, из которых можно сложить $\lambda_2 K_2$. Общая площадь этих частей пропорциональна $\lambda_2^2$.
- Несколько параллелограммов. Их площадь пропорциональна $\lambda_1\lambda_2$.

Понятие объема можно корректно определить и для виртуальных многоугольников, однако мы пропустим соответствующую конструкцию. При этом теряется неотрицательность объема (объем виртуального многоугольника может быть меньше нуля), но сохраняются алгебраические свойства. В частности, определение-теорема 15.1 может быть дословно повторено для виртуальных многогранников.

В следующем параграфе мы поймем, какое алгебро-геометрическое понятие соответствует смешанному объему.

Пусть $X_\Sigma$ – полное гладкое торическое многообразие (напомним, это равносильно тому, что веер $\Sigma$ состоит из регулярных конусов). Пусть $\tau_i$ – одномерные конуса веера (то есть лучи), $D_i$ – соответствующий им простые инвариантные дивизоры.

Пусть $K$ – виртуальный многоугольник, подчиненный вееру $\Sigma$. Поскольку одномерные конуса $\Sigma$ занумерованы, стороны $K$ тоже получат естественную нумерацию $K^i$. Обозначим через $h_K(i)$ величину сдвига его $i$-той стенки. Кроме того, обозначим через $l(K^i)$ длину его стороны, которую мы вычислим следующим особым способом:

Рассмотрим два конуса $\check{\sigma}$ и $\check{\sigma}'$, прилегающих к стороне многоугольника (см. рис. 20). Пусть $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ – их вершины. Если конуса расположены так, как на рис.

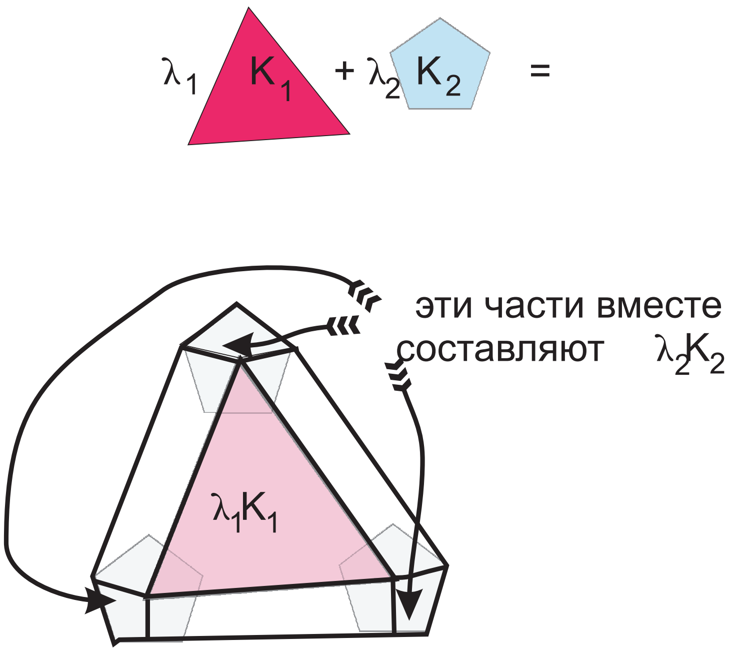


Рис. 27. Пояснение к определению смешанного объема: на рисунке виндо, что объем ведет себя полиномиально

20, 2, то положим

$$l(K^i) = \text{ число целых точек в отрезке } (\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2) - 1.$$

Иначе положим

$$l(K^i) = -\text{ число целых точек в отрезке } (\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2) + 1.$$

Другими словами, мы меряем длину отрезка в масштабе, порожденном узлами решетки. При этом берем длину отрезка со знаком $\pm 1$.

**Пример 15.2.** *У виртуального многоугольника (рис. 21, 2) – три стороны, длина каждой из них* $-2$*.*

И для обычных (выпуклых), и для виртуальных многоугольников справедлива следующая теорема:

**Теорема 15.3.**
- $V(K_1, K_2) = 1/2 \sum h_{K_1}(i) l(K_2^i)$;
- $V(K, K) = V(K) = 1/2 \sum h_K(i) l(K^i)$. $\square$

В силу теоремы 14.7, каждому (простому) дивизору $D_i$ соответствует некоторый виртуальный многогранник. Обозначим его через $d_i$ и попробуем найти его явно. Для этого надо следовать алгоритму сдвига стенок из той же теоремы. В данном случае мы должны:

- взять ориентированные прямые, ортогональные $\tau_j$ и проходящие через начало координат. Напомним, что каждая такая прямая задает полуплоскость.
- сдвинуть ровно одну из них (с номером $i$) на один шаг,
- остальные прямые оставить неподвижными.

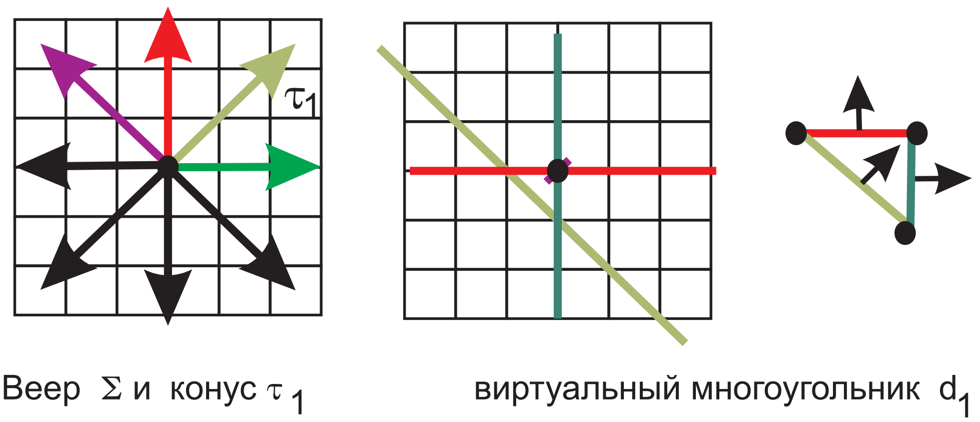


Рис. 28. Веер $\Sigma$, луч $\tau_1$ и виртуальный многоугольник, соответствующий простому инвариантному дивизору $D_1$

В результате получится виртуальный треугольник (см. рис. 28). От выпуклого треугольника его отличает, например, необычная ориентация сторон (сравните с рис. 12).

Имеет место следующее техническое вычисление:

**Теорема 15.4.** *Пусть $\Sigma$ – регулярный веер. Тогда*

- *Для разных $i, j$ справедливо*
$$V(d_i, d_j) = \begin{cases} 1/2, & \text{если лучи с номерами } i \text{ и } j \text{ – соседние;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
- *Пусть, кроме того, каждый луч $\tau_i$ разрезает регулярный конус веера. Тогда $V(d_i) = -1/2$.* □

## 16. Индекс пересечения. Соответствие "индекс пересечения – смешанный объем"

В этом параграфе мы построим теорию пересечений. Это значит, что мы придадим точный смысл понятию "число точек пересечения двух кривых". Наивным способом это сделать не удастся, мы увидим, что индекс самопересечения кривой может оказаться отрицательным, что противоречит обычной интуиции. Поэтому мы зададим понятие индекса пересечения аксиоматически.

**Определение 16.1.** Пусть $X_\Sigma$ – гладкое торическое многообразие. Отображение
$$< .,. >: Div \times Div \to \mathbb{Z}$$
называется *индексом пересечения*, если оно обладает следующими свойствами:

(1) $< .,. >$ инвариантно относительно перестановки: $< D^1, D^2 >=< D^2, D^1 >$;
(2) $< .,. >$ инвариантно относительно линейной эквивалентности, то есть для всякой рациональной функции $f$ и всякого дивизора $D$
$< (f), D >= 0$;
(3) $< .,. >$ линейно по каждому аргументу;
(4) для разных $\tau_i, \tau_j$ выполнено $< D_i, D_j >= \begin{cases} 1, & \text{если i и j – соседние;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

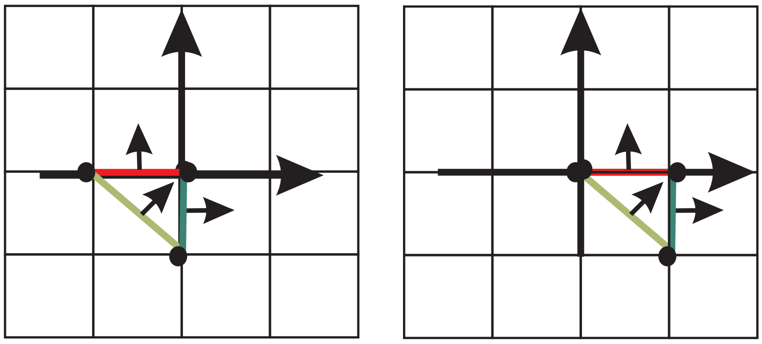

Рис. 29. Эти два виртуальных многоугольника задают разные, но линейно эквивалентные дивизоры

**Теорема 16.2.** *Индекс пересечения существует и единственный.*

Доказательство.

- Чтобы доказать единственность, сведем вычисление индекса пересечения к уже известным по четвертой аксиоме индексам. Вычислим индекс пересечения для некоторых инвариантных дивизоров $D^1$ и $D^2$.

  Записав $< D^1, D^2 >=< \sum a_i D_i, \sum b_j D_j >$, воспользуемся линейностью. Нам известны все индексы пересечения $< D_i, D_j >$ для разных $i$ и $j$, поэтому если мы вычислим, пользуясь аксиомами, индексы самопересечения $< D_i, D_i >$, то единственность будет доказана.

  Покажем, как можно вычислить $< D_1, D_1 >$ для примера см. рис. 28.

  Два виртуальных треугольника (см. рис. 29) отличаются на параллельный перенос, а значит, задают линейно эквивалентные между собой дивизоры. Как мы знаем, первый треугольник задает $D_1$, а второй – некоторую комбинацию $\sum k_i D_i$, в которой, однако, дивизор $D_1$ не участвует, так как во втором треугольнике красная стенка сдвинута на расстояние 0. Нам важно,что дивизоры $D_1$ и $D_8$ входят в эту сумму с коэффициентами 0 и $-1$ соответственно. Следовательно, $< D_1, D_1 >=< D_1, \sum k_i D_i >= -1$. (Мы еще раз воспользовались линейностью.)
- Докажем существование. Пусть $K(D^1), K(D^2)$ – виртуальные многогранники, соответствующие дивизорам $D^1, D^2$ . Положим по определению $< D^1, D^2 >= 2V(K(D^1), K(D^2))$. □

**Задача 16.3.** *На рис. 30 конус $\tau_8$ регулярно разбивает не регулярный конус. Проверьте, что в этом случае $< D_8, D_8 >= -2$ (воспользуйтесь рис. 31).*

## 17. Теорема Бернштейна-Кушниренко

**Определение 17.1.** *Многогранником Ньютона* полинома $f$ называется выпуклая оболочка носителя *supp* $f$.

**Теорема 17.2.** *Пусть $f_1, f_2$ – полиномы (общего положения) от 2 переменных. Тогда число решений системы*

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{cases}$$

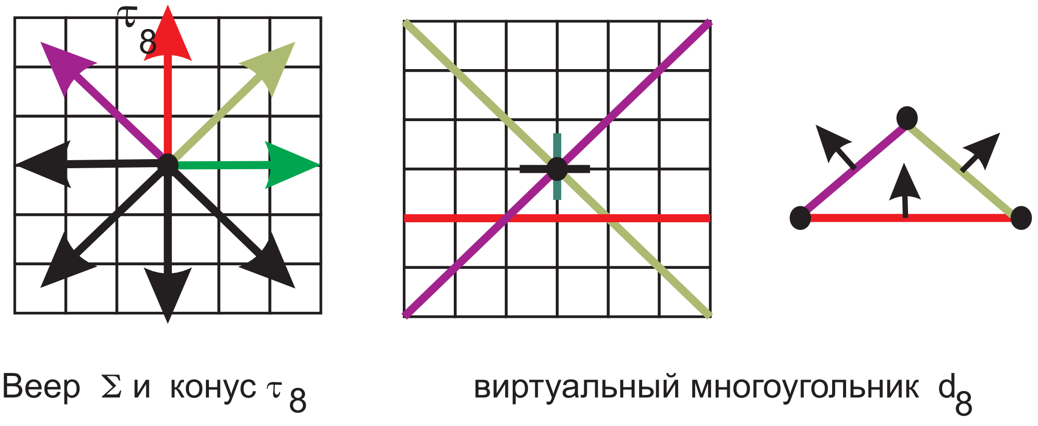


Рис. 30. Еще один пример виртуального многоугольника, соответствующего простому инвариантному дивизору

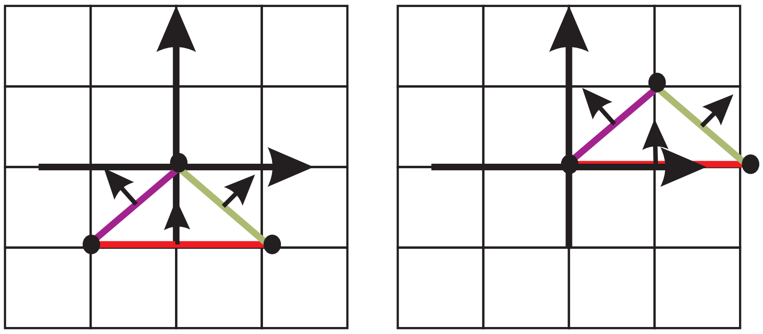

Рис. 31

*в торе* $T^2$ *(то есть число ненулевых решений) равно* $2V(K_1, K_2)$*, где* $K_i$ *– многогранник Ньютона полинома* $f_i$*.*

Верен прямой аналог этой теоремы для размерности $n$. При этом вместо множителя 2 появляется множитель $n!$.

Набросок доказательства теоремы.

Обозначим через $\Sigma_j$ веер многогранника (точнее, многоугольника) $K_j$ и через $\Sigma$ – общее измельчение вееров $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$, подразбитое еще до регулярного веера. Занумеровав последовательно лучи $\tau_i$ веера $\Sigma$, ведем следующие обозначения:

$D_i$ – простой инвариантный дивизор, соответствующий $\tau_i$.

$K_j^i$ – $i$-тое ребро многоугольника $K_j$. Его внешняя нормаль – $\tau_i$. (Вообще говоря, $K_j^i$ может выродиться в вершину. В этом случае на нее нужно смотреть как на ребро нулевой длины.)

$f_j^i$ – часть полинома $f_j$, соответствующая ребру $K_j^i$, а именно,

$$f_j^i = \left(\sum \lambda_{\mathbf{a}} \mathbf{z}^{\mathbf{a}}\right)^i = \sum_{\mathbf{a} \in K_j^i} \lambda_{\mathbf{a}} \mathbf{z}^{\mathbf{a}}.$$

$D(f_j)$ – замыкание множества $(f_j) \cap T^2$ . (Это не главный дивизор! Это замыкание множества нулей полинома $f_j$).

$D_{inv}(f_j)$ – эквивалентный $D(f_j)$ инвариантный дивизор.

Доказательство теоремы опирается на две леммы. Первая из них говорит, что при уходе на бесконечность полином ведет себя так, как ведет себя его главная часть $f_j^i$. Так, например, при больших $x$, полином $x^5+x^3+5$ ведет себя как $x^5$, а наоборот, при маленьких $x$ – как 5.

Вторая лемма означает в частности, что кривые $D(f_j)$ трансверсально пересекают инвариантные многообразия $D_i$.

**Лемма 17.3.**

$$D_{inv}(f_1)=\sum h_{K_1}(i)D_i. \quad \square$$

**Лемма 17.4.**

$$< D(f_2), D_i >= \sharp(D(f_2)\cap D_i)=D(f_2^i)=l(K_2^i). \quad \square$$

Докажем теперь теорему.

В силу общности положения, можно считать, что все точки пересечения $D(f_1)$ и $D(f_2)$ лежат в торе. Тогда число решений системы уравнений равно индексу пересечения этих двух дивизоров. Вычислим его.

$$< D(f_1), D(f_2) >=$$

Воспользуемся инвариантностью.

$$=< D_{inv}(f_1), D(f_2) >=$$

Воспользуемся леммой 17.3 и линейностью.

$$=\sum h_{K_1}(i) < D_i, D(f_2) >=$$

$$=\sum h_{K_1}(i)\sharp(D(f_2)\cap D_i)=$$

Согласно лемме 17.4,

$$=\sum h_{K_1}(i)l(K_2^i)=2V(K_1,...,K_n). \quad \square$$

## 18. Словарь соответствий

| | | |
|---|---|---|
| веер | $\leftrightarrow$ | торическое многообразие |
| регулярный веер | $\leftrightarrow$ | гладкое торическое многообразие |
| конус | $\leftrightarrow$ | аффинное торическое многообразие |
| регулярный конус | $\leftrightarrow$ | $\mathbb{C}^2$ |
| регулярное измельчение | $\leftrightarrow$ | раздутие |
| виртуальный многоугольник | $\leftrightarrow$ | обратимый пучок |
| сумма Минковского | $\leftrightarrow$ | тензорное произведение пучков |
| виртуальный многоугольник | $\leftrightarrow$ | дивизор |
| сумма Минковского | $\leftrightarrow$ | сумма дивизоров |
| смешанный объем | $\leftrightarrow$ | индекс пересечения |

## 19. Модули, орбиты, кольца...

**Определение 19.1.** *Кольцо* – это множество, на котором заданы две операции, «сложение» и «умножение». При этом предполагается

(1) коммутативность сложения;
(2) ассоциативность сложения;
(3) существование нуля (нейтрального элемента относительно сложения);
(4) существование обратного элемента относительно сложения;
(5) ассоциативность умножения
(6) существование единицы
(7) и – в нашей статье – коммутативность умножения.

**Определение 19.2.** Кольцо называется *областью целостности*, если
$f \cdot g = 0 \Rightarrow f = o$ или $g = o$

**Определение 19.3.** Пусть $R$ — кольцо. *$R$-модулем $M$* называется абелева группа $M$ с операцией умножения на элементы кольца $R$

$$R \times M \to M, \quad (r, m) \to rm,$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

(1) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2(m))$
(2) $1m = m$
(3) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
(4) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$

Каждое кольцо является модулем над самим собой.

**Определение 19.4.** Говорят, что группа $G$ *действует на множестве* $A$, если задано отображение $G \times A \to A, \quad (g, m) \to gm$. такое что

(1) $(gh)m = g(hm)$
(2) $1m = m$, где 1 – единица группы $G$.

Действие группы $G$ определяет на $A$ отношение эквивалентности:

$$a \sim_G b \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in G : ga = b.$$

Классы эквивалентности называются *орбитами.*

**Определение 19.5.** *Идеалом* в кольце $R$ называется подгруппа по сложению, замкнутая относительно умножения на элементы из $R$.

Всякий набор $f_1, ..., f_k \in R$ порождает идеал, который мы обозначаем через $< f_1, ..., f_k >$. Легко понять, что $< f_1, ..., f_k >$ – минимальный (по включению) идеал, содержащий все элементы $f_1, ..., f_k$.

Известно, что в кольце полиномов все идеалы конечно порождены.

**Определение 19.6.** Если идеал $\mathfrak{a}$ не совпадает со всем кольцом, и при этом из $f \cdot g \in \mathfrak{a}$ всегда следует $f \in \mathfrak{a}$ или $g \in \mathfrak{a}$, то идеал называется *простым.*

Фактор кольца по идеалу – область целостности тогда и только тогда, когда идеал прост.

**Определение 19.7.** Если идеал $\mathfrak{a}$ не совпадает со всем кольцом, и при этом не содержится в большем идеале, отличном от самого кольца, то идеал называется *максимальным.*

Фактор кольца по идеалу является полем тогда и только тогда, когда идеал максимален.

## 20. Часто задаваемые вопросы

**Почему все картинки – вещественные?** Группа $\mathbb{C}^*$(по умножению) изоморфна произведению групп $\mathbb{R}_+ \times S^1$. Изоморфизм $\upsilon : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+ \times S^1$ устроен так: $\upsilon(\mathbf{z}) = (|\mathbf{z}|, arg\,\mathbf{z})$. Соответственно, тор $T^2$ представится в виде $(\mathbb{R}_+)^2 \times (S^1)^2$. Мы рисуем на картинках только "вещественную часть"тора, то есть $(\mathbb{R}_+)^2$. Это множество, гомеоморфное открытому диску, и в этом смысле рисунки 2 и 13 точны. (Если хочется, то чтобы увидеть целиком тор $T^2$, представьте, что над каждой точкой рисунка "висит"$S^1 \times S^1$.)

Далее, аффинное торическое многообразие задается системой уравнений вида $\mathbf{z}^\mu = \mathbf{z}^\lambda$. В представлении $T^2 \cong (\mathbb{R}_+)^2 \times (S^1)^2$ каждое уравнение распадается на два: уравнение для $(\mathbb{R}_+)^2$, то есть $|\ \mathbf{z}\ |^\mu = |\ \mathbf{z}\ |^\lambda$, и уравнение для аргумента $\mu \cdot arg\,\mathbf{z} = \lambda \cdot arg\,\mathbf{z}$. Мы рисуем решения именно "вещественной части".

**Нас учили, что склеивать карты можно только с помощью согласованных функций склеек. Являются ли введенные функции склеек согласованными?** Да, являются. Проверим это: пусть у нас склеены три карты $X_{\check{\sigma_1}}$, $X_{\check{\sigma_2}}$ и $X_{\check{\sigma_3}}$. Обозначим координаты в этих картах через $\mathbf{u}$, $\mathbf{p}$ $\mathbf{q}$ соответственно. Они порождены тремя наборами векторов решетки – $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ и $\{c_k\}$. Обозначим функции перехода от одной системы координат через $\varphi_{pu}$, $\varphi_{qp}$и $\varphi_{qu}$. Условие согласованности означает, что $\varphi_{qp} \circ \varphi_{pu} = \varphi_{qu}$. Но упомянутые функции перехода порождаются пересчетом систем векторов $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ и $\{c_k\}$. Эти три набора векторов лежат в одном и том же пространстве, поэтому пересчеты векторов согласованы.

**Мы поняли, что тор действует на каждой из карт. Понятно также, что склейка сохраняет структуру разбиения на орбиты. Можно ли описать действие тора на $X_\Sigma$ другим способом, не прибегая к склейке карт?** Начнем сначала, подытожив уже известное нам. Тор $T^2$ содержится в $X_\Sigma$. Это можно увидеть двумя способами:

- Тор вкладывается в каждую из карт (см. параграф 3) , и при склейке образы вложений склеиваются между собой.
- Рассуждение из параграфа 6: всякий веер $\Sigma$ содержит одноточечный конус $\{O\}$, следовательно, многообразие $X_\Sigma$ содержит $X_{\{\check{O}\}} = T^2$.

$T^2$ действует на своем образе $\varphi(T^2)$ по правилу

$$(t_1, t_2)(\varphi(t_3, t_4)) := \varphi(t_1 t_3, t_2 t_4).$$

Это действие непрерывно и продолжается по непрерывности на все многообразие $X_\Sigma$.

**Почему $X_\Sigma$ компактно? И в какой топологии оно компактно?** На каждой из карт (а значит, и на всем многообразии) имеется топология, унаследованная от евклидовой топологии на $\mathbb{C}^n$. Компактность относится именно к этой топологии.

Мы дадим основную идею доказательства компактности. Пусть у нас есть последовательность $(\mathbf{x}_i)$; покажем, что она содержит сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можно считать, что $(\mathbf{x}_i)$ лежит в торе.

Рассмотрим на торе функции $\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$.

Каждая такая функция определяется точкой $\mathbf{m}$ на плоскости. У последовательности $(\mathbf{x}'_i)$ можно выбрать подпоследовательность $(\mathbf{x}''_i)$ так, что для каждого $\mathbf{m}$ ограничено либо множество точек $(\mathbf{x}''_i)^{\mathbf{m}}$ , либо множество $(\mathbf{x}''_i)^{-m}$. Пусть

$M = \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2 :$ множество $\{\mathbf{x}''^{\mathbf{m}}_i\}$ ограничено$\}$.

Для M очевидно выполнено следующее равенство: $pos(M) \cup pos(-M) = R^2$.

Следовательно, $pos(M)$ содержит некоторую полуплоскость, двойственный конус к которой есть луч. Поскольку наш веер по условию полный, то этот луч содержится в некотором конусе. Получается, что в карте, соответствующей этому конусу, множество $(\mathbf{x}''^{\mathbf{m}}_i)$ ограничено. Тогда и сама последовательность ограничена в ней. Следовательно, $(\mathbf{x}'_i)$ лежит в некотором компакте. Противоречие.

## Список литературы


[Dan78] Vladimir I. Danilov. The geometry of toric varieties. *Russian Mathematical Surveys*, 33(2):97–154, 1978.

[Ewa96] Günter Ewald. *Combinatorial convexity and algebraic geometry.* Springer Verlag, 1996.

[Khov77] Askold G. Khovanskii Newton polyhedra and toroidal varieties, Functional Analysis and Its Applications Springer New York ISSN 0016-2663 (Print) 1573-8485 Volume 11, Number 4 /

[KP93] Askold G. Khovanskii and Alexandr V. Pukhlikov. Finitely additive measures of virtual polytopes. *St Petersburg Mathematical Journal*, 4(2):22 pages, 1993.

[McM89] Peter McMullen. The polytope algebra. *Advances in Mathematics*, 78(1):76–130, 1989.

[Oda88] Tadao Oda. *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties.* Ergeb. der Mathematik. Springer Verlag, 1988.


*E-mail address*: `gaiane-panina@rambler.ru`