Разрезания прямоугольников, случайные блуждания и электрические цепи

Михаил Скопенков

В курсе доказаны следующие классические результаты, а также некоторые их современные обобщения:

Теорема Пойа. Если человек случайным образом перемещается по 2-мерной решетке, то он вернется в начальную точку с вероятностью 1. Если же он перемещается по 3-мерной решетке, то вероятность его возвращения строго меньше 1.

Теорема Дена. Если прямоугольник разрезан на квадраты, не обязательно равные, то отношение длин его перпендикулярных сторон рационально.

Теорема Куранта-Фридрихса-Леви.[1] На границе единичного квадрата задана кусочно-линейная функция T. На узлах квадратной решетки с шагом $1/2^N$ задана функция T_N, значение которой в каждом узле внутри квадрата равно среднему арифметическому ее значений в соседних узлах, а в каждом узле на границе равно функции T. Тогда при неограниченном увеличении числа N функции T_N стремятся к некоторой функции.

Доказательства основаны на замечательной физической интерпретации, использующей электрические цепи. Курс в основном состоит из задач, решение которых доступно школьникам. Никаких специальных знаний физики не требуется. Звездочкой отмечены необязательные разделы и задачи.

---

1. Случайные блуждания

1.1. Одномерные блуждания

Мы сначала сформулируем задачу и лишь потом дадим необходимые определения.

1.1.1. Человек ходит по отрезку улицы, состоящему из 5 кварталов. Начав свой путь на границе кварталов в точке x, он с вероятностью $1/2$ перемещается на один квартал влево и с вероятностью $1/2$ — на один квартал вправо. Подойдя к границе кварталов, он опять выбирает направление движения случайным образом. Если он оказывается в точке 5 (его дом) или в точке 0 (бар), то он прекращает движение: см Рис 1.

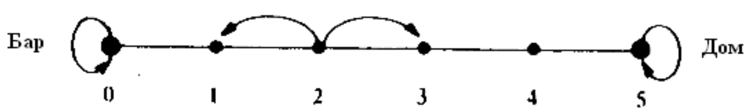


Рис. 1: Случайное движение по улице; см. задачу 1.1.1.

E-mail address: skopenkov@rambler.ru

[1] Доказательство данной теоремы не вошло в данный материал.

(A)* Напишите компьютерную программу, моделирующую движение этого человека. Запустите ее много раз и определите процент числа случаев, в которых он приходит домой. Вы можете использовать этот способ для угадывания ответов в последующих задачах.

(B) Пусть $P_T(x)$ — вероятность того, что человек, начавший свое движение в точке x и сделавший не более T ходов, оказался дома. Заполните следующую таблицу десятичными дробями с точностью до сотых.

Таблица 1: Вероятности $P_T(x)$ для малых T

T \ x	0	1	2	3	4	5
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	1.00
2						
3						
4						

(C) Найдите вероятность $P(x)$ того, что человек дойдет до дома через какое-то количество ходов.

Определение. (A) Предположим, что у некоторого эксперимента имеется n *равновероятных* исходов, и событие X происходит ровно в m из них. Тогда *вероятностью* события X называется число $P_1(X) := m/n$.

Например, вероятность выпадения орла при бросании монеты — 1/2; вероятность выпадения 6 очков на кубике — 1/6; вероятность пойти направо по нашей улице — 1/2.

(B) Теперь предположим, что событие X зависит от последовательности таких экспериментов. Последовательность из T экспериментов имеет n^T возможных исходов. Предположим, что событие X происходит ровно при m_T исходов из них. Тогда *вероятностью* события X называется число $P_T(X) := m_T/n^T$.

Например, есть ровно 4 возможных исхода при бросании монеты 2 раза:

1-ый бросок	орел	орел	решка	решка
2-ой бросок	орел	решка	орел	решка

Пусть событие X состоит в появлении решки хотя бы один раз. Событие X происходит в 3 случаях из 4 возможных. Поэтому вероятность события X есть $P_2(X) = 3/4$.

Вероятность получения более 10 очков при бросании двух кубиков — 1/12, так как это событие происходит в ровно 3 случаях ($5+6$, $6+5$ или $6+6$) из 36 возможных. Вероятность того, что человек, начавший с точки 3, сдвинется вправо два раза подряд составляет 1/4.

(C) Пусть теперь событие X зависит от бесконечной последовательности таких экспериментов. Мы будем называть число $P(X)$ *вероятностью* события X, если вероятности $P_T(X)$ стремятся к числу $P(X)$ при стремлении T к бесконечности[2].

[2]Формально это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует число T_0 такое, что для каждого $T > T_0$ выполнено $|P(X) - P_T(X)| < \varepsilon$.

Например, вероятность выпадения решки хотя бы один раз в бесконечной серии бросков составляет $P(X)=1$, так как $P_T(X)=1-1/2^T$ стремится к 1 при стремлении T к бесконечности.

То, что вероятности $P(X)$ *существуют* для всех событий X, рассматриваемых в проекте, можно использовать без доказательства.

1.1.2. * Петя и Паша играют на монетки; всего у них есть 5 монеток; в каждом раунде Петя выигрывает у Паши одну монетку с вероятностью 1/2 и проигрывает с вероятностью 1/2; они играют до тех пор, пока у Пети не станет 0 монеток (он проиграл) или 5 (он выиграл все монеты Паши). Найдите вероятность $P(x)$ того, что Петя выиграет, начав игру с x монетками.

1.1.3. * Предположим, нашего "путешественника" сносит в одну сторону; точнее, пусть он каждый раз перемещается вправо с вероятностью p и влево с вероятностью $q=1-p$. Найдите вероятности $P(x)$ в этом случае.

1.1.4. * Предположим, что вы играете на деньги; сначала у вас 20 монет, а у вашего соперника — 50 монет; в каждой игре вы выигрываете одну монету с веротностью 0.45 и проигрываете с вероятностью 0.55; игра продолжается до тех пор, пока у кого-либо не закончатся деньги. Найдите вероятность своего разорения.

Определение. *Электрическая цепь* — это связный конечный граф, у которого каждому ребру xy приписано положительное вещественное число, называемое его *проводимостью* [3] $C(xy)$, и задано два непересекающихся выделенных множества вершин (P и N). Вершины из множества N соединены с отрицательным полюсом батарейки и землей, а вершины из множества P — с положительным; см. рисунок 2.

Потенциалы вершин $v(x)$ определяются следующими аксиомами:

1. *Граничные условия.* Если $x\in N$, то $v(x)=0$. Если $x\in P$, то $v(x)=1$.
2. *Правило Кирхгофа.* Если $x\notin P\cup N$, то $\sum_{xy} C(xy)\,(v(x)-v(y))=0$, где суммирование ведется по всем ребрам xy, содержащим вершину x.

Число $i(xy):=C(xy)\,(v(x)-v(y))$ называется *током*, идущим по ребру xy; $i(x):=\sum_{xy} i(xy)$ — *током*, втекающим в цепь через вершину x (так, $i(x)=0$ для каждого $x\notin P\cup N$ по аксиоме 2); $C:=\sum_{x\in P} i(x)$ называется *эффективной проводимостью* цепи между множествами P и N; $Q:=\sum_{xy} C(xy)\,(v(x)-v(y))^2$, где суммирование ведется по всем ребрам цепи, называется *тепловой мощностью* цепи.

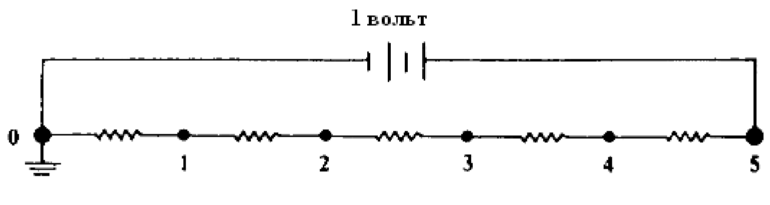


Рис. 2: Электрическая цепь; см. задачу 1.1.3.

[3] Величина, обратная проводимости, называется *сопротивлением*.

1.1.5. Одинаковые резисторы соединены последовательно и подключены к батарейке в 1 вольт как показано на рисунке 2. Найдите потенциалы $v(x)$ в точках $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

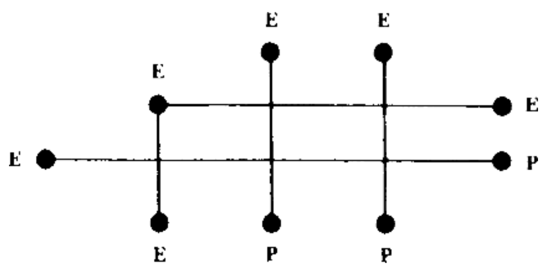
1.1.6. Рассмотрим цепь с вершинами $0, 1, \ldots, n$, ребрами $01, 12, \ldots, (n-1)n$ единичной проводимости, и выделенными множествами $N = \{0\}$, $P = \{n\}$.
(A) *Принцип максимума.* Функция $v(x)$, удовлетворяющая аксиоме 2 достигает своего максимума и минимума в вершинах из множества $P \cup N$.
(B) *Единственность.* Если $v(x)$ и $u(x)$ — две функции, удовлетворяющие аксиомам 1–2, то $v(x) = u(x)$ для всех x.
(C) Найдите потенциалы $v(x)$ и эффективную проводимость данной цепи. К чему они стремятся при стремлении числа n к бесконечности?

1.1.7. Сформулируйте и докажите теорему Пойа для 1-мерной решетки.

1.2. Двумерные блуждания

1.2.1. Рассмотрим город, схема которого приведена на рисунке 3 слева. Отрезки обозначают улицы. Пути отхода помечены буквой E, а буквой P помечены точки, занятые полицией. Найдите с точностью до сотых вероятность $P(x)$ того, что начав свой путь в точке x, человек убежит, а не попадет в руки полиции. Из точки $x = (a, b)$ он перемещается в каждую из точек $(a+1, b), (a-1, b), (a, b+1), (a, b-1)$ с вероятностью $1/4$. Если он достигает одной из точек E или P, то его передвижения заканчиваются.

1.2.2. Найдите потенциалы $v(x)$ в цепи из единичных резисторов на рисунке 3 справа.



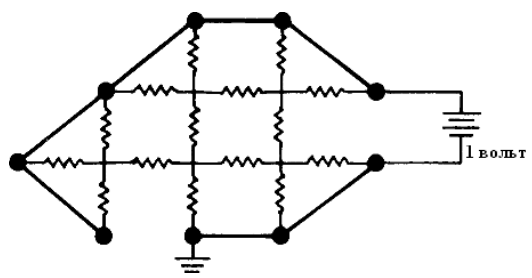


Рис. 3: Случайное движение по городу и электрическая цепь; см. задачи 1.2.1 и 1.2.2.

1.2.3. Паук перемещается случайным образом по ребрам
(A) куба; **(B)*** октаэдра; **(C)*** додекаэдра; **(D)*** икосаэдра;
если он начинает движение в точке a, то какова вероятность того, что он достигнет противоположной вершины h быстрее, чем вернется в начальную вершину a; см. рисунок 4 слева?

1.2.4. Следующие преобразования сохраняют эффективную проводимость цепи:
(A) замена двух резисторов, соединенных последовательно, на один резистор проводимости $1/\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$; см. рисунок 5 слева;
(B) замена двух параллельно соединенных резисторов на один резистор с проводимостью $C_1 + C_2$; см. рисунок 5 справа;
(C) объединение двух вершин с одинаковыми потенциалами в одну новую вершину.

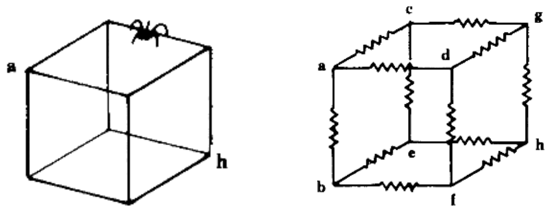


Рис. 4: Случайное блуждание по кубу и электрическая цепь; см. задачи 1.2.3(A) и 1.2.5(A).

1.2.5. Найдите эффективную проводимость между
(1) противоположными вершинами; **(2)*** смежными вершинами;
(A) куба; **(B)*** октаэдра; **(C)*** додекаэдра; **(D)*** икосаэдра;
с ребрами единичной проводимости; см рисунок 4 справа.

1.2.6. * Пьяный турист выходит из отеля и перемещается случайным образом по улицам Парижа, схема центра которого приведена на рисунке 6 слева. Найдите вероятность того, что он дойдет до Триумфальной арки до того, как доберется до окраины города.

1.2.7. ** Проводимость между вершинами **(A)** a и b; **(B)** a и c; двумерной решетки из единичных резисторов равна 2 и $\pi/2$, соответственно; см. Рис. 6 справа.

Для 2-мерной решетки в определении потенциала мы добавляем еще одну аксиому:

3. $v(x)$ стремится к $1/2$ при стремлении расстояния между x и некоторой фиксированной вершиной к бесконечности.

Разрешается пользоваться без доказательства существованием функции $v(x)$, удовлетворяющей аксиомам 1–3.

1.2.8. *Закон монотонности.* Разрезание каких-либо ребер цепи может только уменьшить эффективную проводимость между данными вершинами; см. рисунок 7 слева. Объединение каких-либо вершин в одну вершину может только увеличить эффективную проводимость между данными вершинами; см. рисунок 7 в центре.

1.2.9. **(A)** Докажите, что эффективная проводимость между центром и границей квадратной решетки 4×4 из единичных резисторов меньше 3; см рисунок 7 справа.
(B) К чему стремится проводимость между центром и границей квадратной решетки $2n \times 2n$ из единичных резисторов при стремлении n к бесконечности?

1.2.10. Докажите теорему Пойа для 2-мерной решетки.

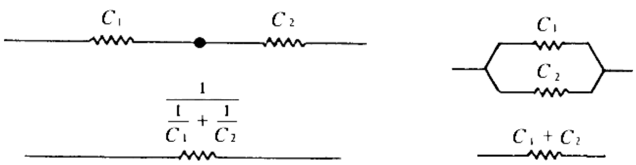


Рис. 5: Последовательное и параллельное соединение; см. задачу 1.2.4.

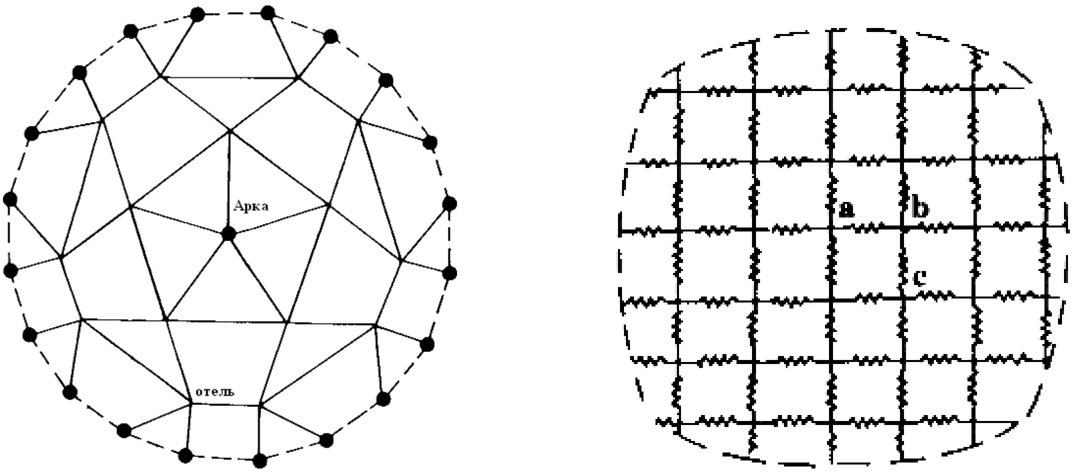


Рис. 6: Туристическая карта Парижа и решеточная цепь; см. задачи 1.2.6 и 1.2.7.

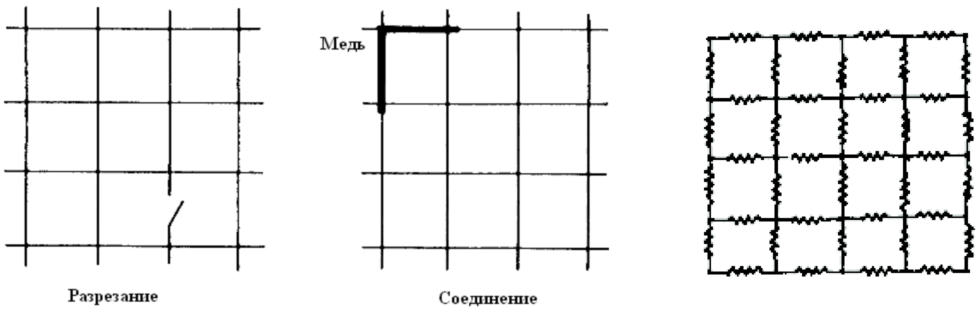


Рис. 7: Разрезание, соединение, и квадратная решетка 4×4; см. задачи 1.2.8 и 1.2.9.

1.3. Трехмерные блуждания

1.3.1. Найдите сопротивление бинарного дерева глубины **(A)** 3; **(B)** 2010, составленного из единичных резисторов (см. рис. 8 слева).

1.3.2. Найдите сопротивление *модифицированного* бинарного и троичного деревьев глубины 2010, в которых каждый резистор на k-ом уровне заменяется на 2^k последовательно соединенных единичных резисторов (см. рис. 8 в центре).

1.3.3. Какие из деревьев, упомянутых **(A)** в задаче 1.3.1; **(B)** в задаче 1.3.2; можно вырезать из трехмерной решетки?

1.3.4. А если разрешаются пересечения (см. рис. 8 справа) ребер на равном расстоянии от корня?

1.3.5. Докажите теорему Пойа для 3-мерной решетки.

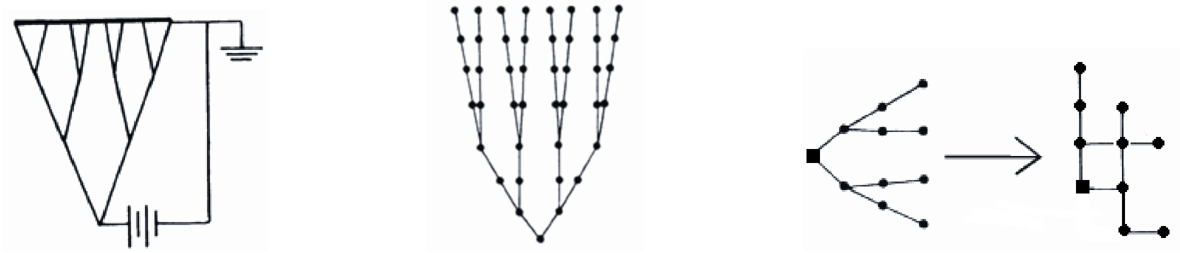


Рис. 8: (Слева) бинарное дерево глубины 3; (в центре) модифицированное бинарное дерево глубины 3; (справа) разрешенные пересечения ребер в этом дереве; см. задачи 1.3.1, 1.3.2 и 1.3.4.

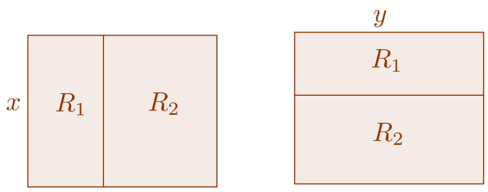
2. Разрезания прямоугольника

2.1. Разрезания прямоугольника на квадраты

Будем считать, что стороны всех рассматриваемых прямоугольников параллельны координатным осям, то есть либо *вертикальны*, либо *горизонтальны*. Под *отношением сторон* прямоугольника мы всегда понимаем отношение длины его горизонтальной стороны к длине вертикальной.

Пример 1. Прямоугольник с отношением сторон R разделён вертикальным разрезом на два прямоугольника с отношениями сторон R_1 и R_2 (рис. 9а). Тогда $R = R_1 + R_2$.

Пример 2. Прямоугольник с отношением сторон R разделён горизонтальным разрезом на два прямоугольника с отношениями сторон R_1 и R_2 (рис. 9б). Тогда $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.



а б

Рис. 9: Разрезания прямоугольника на 2 прямоугольника

2.1.1. Имеется прямоугольный шкаф с квадратными полками, изображчнный на рисунке 10. Найдите отношение ширины шкафа к его высоте.

Рис. 10: Каково отношение ширины этого шкафа к его высоте?

2.1.2. * Докажите, что плоскость можно замостить попарно различными квадратами, длины сторон которых — целые числа.

2.1.3. * Прямоугольник разделён на пять прямоугольников с отношениями сторон $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, $R_4 = R_5 = 3$ так, как показано на рисунке 11 слева. Найдите отношение сторон большого прямоугольника.

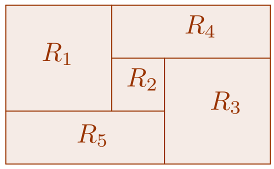


Рис. 11: Разрезание прямоугольника на 5 прямоугольников

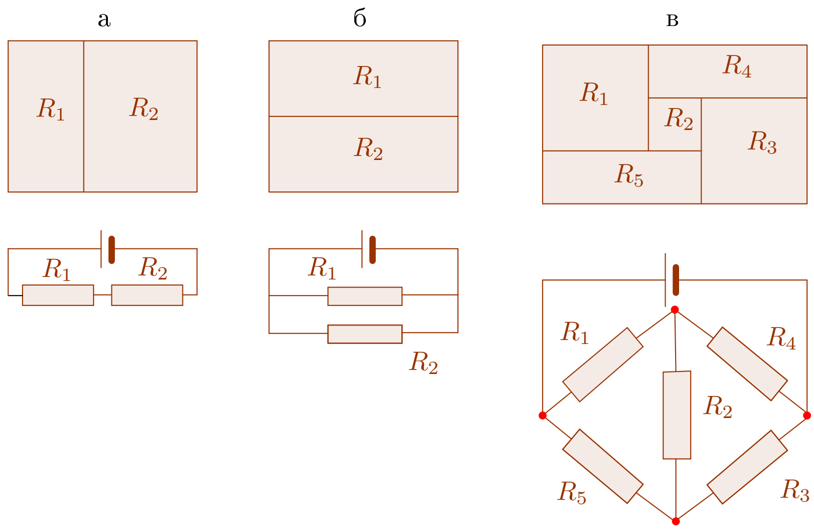


Рис. 12: Физическая интерпретация

Пример 1′. Пусть два резистора R_1 и R_2 соединены *последовательно* (см. нижнюю часть рисунка 12а). Тогда сопротивление полученной цепи равно $R_1 + R_2$.

Пример 2′. Пусть два резистора R_1 и R_2 соединены *параллельно* (см. нижнюю часть рисунка 12б). Тогда сопротивление полученной цепи вычисляется по формуле $\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$.

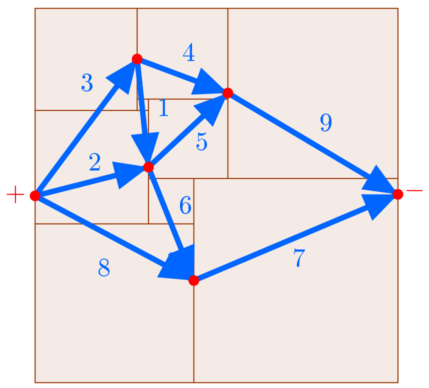


Рис. 13: Построение электрической цепи по разрезанию

Физическая интерпретация. Покажем, как сопоставить разрезанию прямоугольника на меньшие прямоугольники электрическую цепь; на рисунке 13 приведен пример.

Каждой вертикальной линии разреза и вертикальным сторонам большого прямоугольника сопоставлена вершина электрической цепи. Вершина лежит на соответствующем ей отрезке. Каждый меньший прямоугольник ограничен слева и справа двумя вертикальными отрезками. В электрической цепи его изображением служит ребро, соединяющее две вершины. Одна из этих вершин изображает левую сторону маленького прямоугольника, а другая — правую. Сопротивление этого резистора полагается численно равным отношению сторон соответствующего прямоугольника. Вершины, соответствующие вертикальным сторонам разрезаемого прямоугольника, соединяются с разными полюсами батарейки (на рисунке 13 сама батарейка не изображена).

2.1.4. Пусть прямоугольник с отношением сторон R разрезан на n прямоугольников с отношениями сторон $R_1, \dots, R_n$. Тогда из резисторов проводимостей $R_1, \dots, R_n$ можно составить электрическую цепь проводимости R.

Функция $v(x)$ на вершинах электрической цепи называется *гармонической*, если она удовлетворяет аксиоме 2 из определения электрической цепи. Вершины из множества $P \cup N$ назовем *граничными*, остальные — *внутренними*.

2.1.5. (A) *Принцип суперпозиции.* Если функции $u(x)$ и $v(x)$ — гармонические и $a, b \in \mathbb{R}$, то и функция $au(x) + bv(x)$ — гармоническая.
(B) *Принцип максимума.* Гармоническая на конечной электрической цепи функция принимает свое наибольшее и наименьшее значения на граничных вершинах.
(C) *Единственность.* Если $u(x)$ и $v(x)$ — две гармонические функции, совпадающие во всех граничных вершинах конечной электрической цепи, то $u(x) = v(x)$ во всех вершинах x графа.

2.1.6. (A)* *Альтернатива Фредгольма.* Пусть имеется система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases},$$

в которой число уравнений равно числу неизвестных. Докажите, что всегда выполняется одна из следующих возможностей:

1. для любых b_1, ..., b_n система имеет ровно одно решение (в частности, при $b_1 = \ldots = b_n = 0$ существует только нулевое решение);
2. для некоторых b_1, ..., b_n система неразрешима, а для некоторых (в том числе нулевых) имеет бесконечно много решений.

(B)* *Задача Дирихле.* Докажите, что для любой конечной электрической цепи существует функция $v(x)$, удовлетворяющая аксиомам 1–2.

2.1.7. * Эффективная проводимость любой цепи положительна.

2.1.8. (A) Пусть система линейных уравнений с рациональными коэффициентами имеет единственное решение. Тогда это решение состоит из рациональных чисел.
(B)* Существует формула, в которой участвуют только операции сложения, вычитания, умножения и деления, выражающая эффективную проводимость цепи через проводимости отдельных резисторов.

2.1.9. Докажите теорему Дена.

*2.2. Разрезания квадрата на подобные прямоугольники**

2.2.1. Квадрат разрезан на подобные прямоугольники, как показано на рисунке 14. Найдите отношение сторон R прямоугольников разрезания.

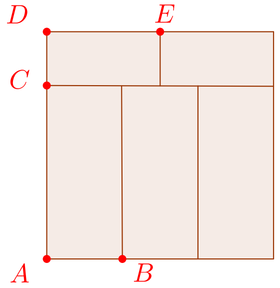


Рис. 14: Разрезание квадрата на 5 подобных прямоугольников

2.2.2. Разрежьте квадрат на прямоугольники с отношениями сторон $2+\sqrt{2}$ и $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$.

2.2.3. Пусть квадрат разрезан на прямоугольники с отношением сторон R и $\frac{1}{R}$. Тогда R — корень ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.

2.2.4. Квадрат нельзя разрезать на прямоугольники с отношениями сторон **(A)** $\sqrt{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$; **(B)** $1+\sqrt{2}$ и $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$; **(C)** $\sqrt[3]{2}$ и $1/\sqrt[3]{2}$.

2.2.5. **(A)** *Вариационный принцип.* Пусть $v(x)$ — произвольная функция на вершинах конечной электрической цепи, удовлетворяющая аксиоме 1, но не обязательно аксиоме 2. Занумеруем вершины графа числами $1,\dots,n$ и пусть $1,\dots,k$ — внутренние вершины. Обозначим $v_1 := v(1)$, $v_2 := v(2)$, $\dots$, $v_n = v(n)$. Будем рассматривать $v_1,\dots,v_k$ как переменные. Рассмотрим тепловую мощность $Q(v_1,\dots,v_k) := \sum_{xy} C(xy)\,(v_x - v_y)^2$ как функцию переменных $v_1,\dots,v_k$. Докажите, что функция $Q(v_1,\dots,v_k)$ принимает наименьшее значение, когда функция $v(x)$ — гармоническая.
(B) Докажите, что для функции $Q(v_1,\dots,v_k)$ существует ровно один набор значений $v_1,\dots,v_k$, при котором она достигает своего минимального значения. Используя это, дайте второе доказательство того факта, что для конечной электрической цепи функция $v(x)$, заданная аксиомами 1–2, существует и единственна.
(C) *Закон сохранения энергии.* Докажите, что минимальное значение тепловой мощности $Q(v_1,\dots,v_k)$ численно равно эффективной проводимости C.
(D) *Принцип монотонности.* Докажите, что если в цепи одну проводимость увеличить, то эффективная проводимость не уменьшится.

2.2.6. *Электрическая цепь переменного тока* определяется аналогично электрической цепи, только величинам $c(xy)$ и $v(x)$ разрешается принимать любые комплексные значения, такие что $\operatorname{Re} c(xy) > 0$. Докажите существование и единственность потенциала в любой цепи переменного тока.

2.2.7. При каких R квадрат можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон R и $1/R$?

3. Указания и решения

3.1. Случайные блуждания

1.1.1 **(A)** Правильность работы программы проверяется следующим образом: разность между "настоящей" и посчитанной вероятностями должна быть примерно пропорциональна числу $\frac{1}{\sqrt{n}}$, где n — число экспериментов.

(B) Ответ смотрите в таблице.

Таблица 2: Вероятности $P_T(x)$ и $P(x)$

x / T	0	1	2	3	4	5
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	1.00
2	0.00	0.00	0.00	0.25	0.50	1.00
3	0.00	0.00	0.13	0.25	0.63	1.00
4	0.00	0.06	0.13	0.38	0.63	1.00
$P(x)$	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00

(C) *Ответ*: $P(x) = x/5$; см последнюю строку в таблице выше.

Доказательство. Рассмотрим случайное блуждание по точкам $0, 1, 2, \ldots, n$. Обозначим за $P(x)$ вероятность дойти из x до N раньше, чем до 0. Рассмотрим получившуюся функцию $P(x)$, определенную в точках $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. Она обладает следующими свойствами:

1. $P(0) = 0$ и $P(n) = 1$.
2. $P(x) = \frac{1}{2}P(x-1) + \frac{1}{2}P(x+1)$ для каждого $x = 1, 2, ..., n-1$.

Свойство 1 следует из того, что при достижении точек 0 и n перемещения заканчиваются; для игры на монетки это означает конец игры. Свойство 2 заключается в том, что вероятность попасть домой из внутренней точки x равна среднему арифметическому вероятностей попадания домой из соседних точек. Свойство 2 выводится из следующего утверждения:

Базовое Утверждение. *Пусть E — некоторое событие, F и G — два события, из которых всегда случается ровно одно. Тогда*

$$P(E) = P(F) \cdot P(E \text{ последует за } F) + P(G) \cdot P(E \text{ последует за } G).$$

В нашем случае E="человек дойдет до бара", F="первый раз он пойдет налево" и G="первый раз он пойдет направо". Тогда получаем $P(E) = P(x)$, $P(F) = P(G) = 1/2$, $P(E \text{ последует за } F) = P(x-1)$, $P(E \text{ последует за } G) = P(x+1)$ и свойство 2 доказано.

Из этих двух свойств вытекает, что $P(x)$ представляет собой арифметическую прогрессию $P(x) = x/n$.

1.1.2 *Ответ*: $P(x) = x/5$; эта задача эквивалентна задаче 1.1.1(C).

1.1.3 *Ответ*: $P(x) = \frac{(q/p)^x - 1}{(q/p)^5 - 1}$.

Указание: Рассуждайте так же, как в решении задачи 1.1.1(C). Покажите, что свойства 1–2 надо заменить на такие:

1. $P(0)=0$ и $P(n)=1$.
2. $P(x)=qP(x-1)+pP(x+1)$ для каждого $x=1,2,...,n-1$.

Выберите A и B такими, чтобы функция $f(x)=A(q/p)^x+B$ удовлетворяла новым свойствам 1–2.

1.1.4 *Ответ*: $\approx 99.995\%$. Точное значение: $1-\frac{(0.55/0.45)^{20}-1}{(0.55/0.45)^{70}-1}$; смотрите решение задачи 1.1.3.

1.1.5 *Ответ*: $v(x)=x/5$. *Указание.* Из аксиом 1–2 следует, что функция $v(x)$ будет линейной для этой цепи.

1.1.6 **(A)** Пусть M — максимум функции $v(x)$. Тогда если $v(x)=M$ для $x\notin P\cup N$, то это же равенство должно быть выполнено для $v(x-1)$ и $v(x+1)$ так как $v(x)$ — среднее арифметическое $v(x-1)$ и $v(x+1)$. Если $x-1$ оказалась внутренней точкой, применяем то же самое рассуждение и получаем $f(x-2)=M$; продолжая рассуждение, получаем $f(0)=M$. Для минимального значения аналогично.

(B) Положим $h(x)=v(x)-u(x)$. Тогда для любой внутренней точки x имеем:

$$\frac{h(x-1)+h(x+1)}{2}=\frac{v(x-1)+v(x+1)}{2}-\frac{u(x-1)+u(x+1)}{2}$$

и поэтому функция $h(x)$ также удовлетворяет аксиоме 2. Но $h(x)=0$ при x из $P\cup N$; из принципа максимума получаем, что максимальное и минимальное значения h равны 0. Значит, $h(x)=0$ и $v(x)=u(x)$.

(C) *Ответ*: $v(x)=x/n$, $C=1/n$; $C\to 0$ и $v(x)\to 0$ для каждого фиксированного x при $n\to\infty$.

Указание: Легко проверить, что функция $f(x):=x/n$ удовлетворяет аксиомам 1–2. Из единственности (см 1.1.6(B)) следует, что $v(x)=x/n$.

1.1.7 **Теорема.** *При случайном блуждании по* 1*-мерной решетке вероятность вернуться когда-либо в начальную точку равна* 1.

Доказательство. Пусть P — вероятность вернуться когда-либо в начальную точку. Обозначим P_n вероятность вернуться в начальную точку до попадания в n или $-n$. Предположим, что все эти вероятности существуют. Тогда $P_n\le P\le 1$ для любого n.

Сейчас мы докажем, что $P_n=1-1/n$. После первого “хода” человек попадает в одну из точек 1 и -1 с вероятностью $1/2$. Если он оказался в точке 1, то из задачи 1.1.1(C) получаем, что вероятность вернуться в начало до попадания в точку n равна $1-1/n$. Если он оказался в точке -1, рассуждаем аналогично. Применяя Базовое Утверждение из решения задачи 1.1.1(C), получаем $P_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}$. (Еще можно было заметить, что $P_n=1-C$, где $C=1/n$ — проводимость цепи из задачи 1.1.6.)

Так как $1-1/n\le P\le 1$ для каждого n, то P равно 1. □

1.2.1 *Ответ*: см. рисунок 15 слева.

Указание. Схема города представлена на рисунке 15 справа. Вероятности $P(x)$ обозначены за a, b, c, d, и e. Как и в 1-мерном случае, функция $P(x)$ удовлетворяет аксиомам 1–2 из опредления электрической цепи. Отсюда мы получаем систему линейных

		1	1	
	1	.823	.787	1
1	.876	.506	.323	0
	1	0	0	

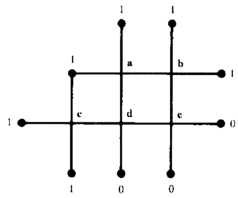


Рис. 15: Вероятности $P(x)$ или потенциалы $v(x)$; см. задачи 1.2.1 и 1.2.2.

уравнений:

$$
\begin{aligned}
a &= (b+d+2)/4;\\
b &= (a+c+2)/4;\\
c &= (d+3)/4;\\
d &= (a+c+e)/4;\\
e &= (b+d)/4.
\end{aligned}
$$

Ответ получаем, решая эту систему.

Замечание. Нахождение точного решения для двухмерной “задачи Дирихле” — дело сложное; поэтому мы рассмотрим два метода нахождения приближенных решений.

Первый метод использует случайные блуждания. Он называется *методом Монте-Карло*, так как случайные блуждания связаны с вероятностями, а в Монте-Карло находится известные игорные дома, азартные игры в которых тоже связаны с вероятностями. Мы моделируем много случайных блужданий из точки x и находим долю путей, закончившихся в точках E. Из закона больших чисел следует, что полученная оценка будет приближением для “настоящей” вероятности $P(x)$. Этот яркий и простой метод позволяет находить решения, но он не очень эффективен.

Теперь опишем более эффективный *метод релаксации*. Напомним, что мы ищем функцию с заданными значениями на границе у которое значение в любой внутренней точке равно среднему арифметическому значений ее соседей. Возьмем какую-нибудь функцию с подходящими граничными значениями и возьмем некоторую внутреннюю точку. В общем случае значение функции не будет равно среднему арифметическому значений в соседних точках. Тогда попробуем “подогнать”: положим новое значение функции в этой точке равным среднему арифметическому значений в соседних точках. Теперь будем по очереди брать остальные внутренние точки и делать с ними ту же операцию. Когда мы пройдем по всем внутренним точкам, функция не будет удовлетворять аксиоме 2, так как после изменения значения функции в одной точке мы могли изменить значения в соседних с ней точках, нарушив равенство. Тем не менее, полученная функция будет “лучше” удовлетворять аксиоме 2, чем та функция, с которой мы начали; повторяя этот процесс (проходя каждый раз по всем внутренним точкам) мы будем получать приближения к решению лучше и лучше.

1.2.2 *Ответ*: см. рисунок 15 слева; эта задача эквивалентна задаче 1.2.1.

1.2.3 *Ответ*: **(A)** 2/5; **(B)** 1/2; **(C)** 2/7; **(D)** 2/5.

Указание. Сведем задачу к задаче 1.2.5 при помощи следующего утверждения:

Физическая интерпретация вероятности. *Вероятность того, что случайное блуждание по графу G из вершины a достигнет вершины h до возврата в a, равна*

$$P = C/\deg a,$$

где C — проводимость графа G (все резисторы единичные) между a и h, а $\deg a$ — число ребер, выходящих из вершины a.

1.2.4 **(C)** *Указание.* Функция $v(x)$ однозначно определена на вершинах получившейся цепи. Проверьте, что она удовлетворяет аксиомам 1–2.

1.2.5 *Ответ*: **(1A)** 6/5; **(1B)** 2; **(1C)** 6/7; **(1D)** 2.
(2A) 12/7; **(2B)** 12/5; **(2C)** 30/19; **(2D)** 30/11.
(2A) *Указание.* Соединим точки a и b с батарейкой; см. рисунок 4 справа. Потенциалы в точках c и d равны из симметрии; аналогично в точках e и f. Таким образом, наша схема эквивалентна схеме, изображенной на рисунке 16 слева.

Используя формулы для параллельного и последовательного соединения резисторов, эта цепь сводится в к цепи из одного резистора сопротивлением 7/12 ом (см рисунок 16 справа). Таким образом, сопротивление равно 7/12.

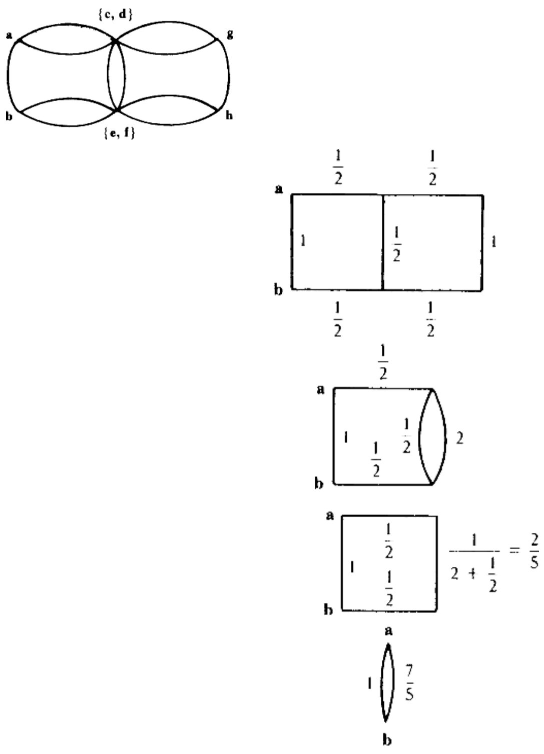


Рис. 16: Упрощение цепи; см решение задачи 1.2.5.

1.2.6 *Ответ*: 1/7. Решение аналогично решению задачи 1.2.3.

1.2.7 **(B)** Авторам неизвестно элементарное решение задачи. Красивое решение, использующее дискретное преобразование Фурье, вы можете найти в книге [16].

1.2.8 *Указание.* Смотрите задачу 2.2.5.

1.2.9 **(B)** *Ответ*: $C \to 0$ при $n \to \infty$.

Указание. Применим закон монотонности: объединим вместе точки, расположенные на квадратах, как показано на рисунке 17 сверху. Полученная цепь эквивалентна цепи на рисунке 17 в центре. Так как можно заменить n параллельных резисторов в 1 ом на один резистор в $1/n$ ом, цепь эквивалентна цепи на рисунке 17 снизу. Проводимость этой цепи равна

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8k-4}}.$$

Это число стремится к нулю при стремлении n к бесконечности. Так как проводимость старой цепи не больше, она тоже стремится к нулю.

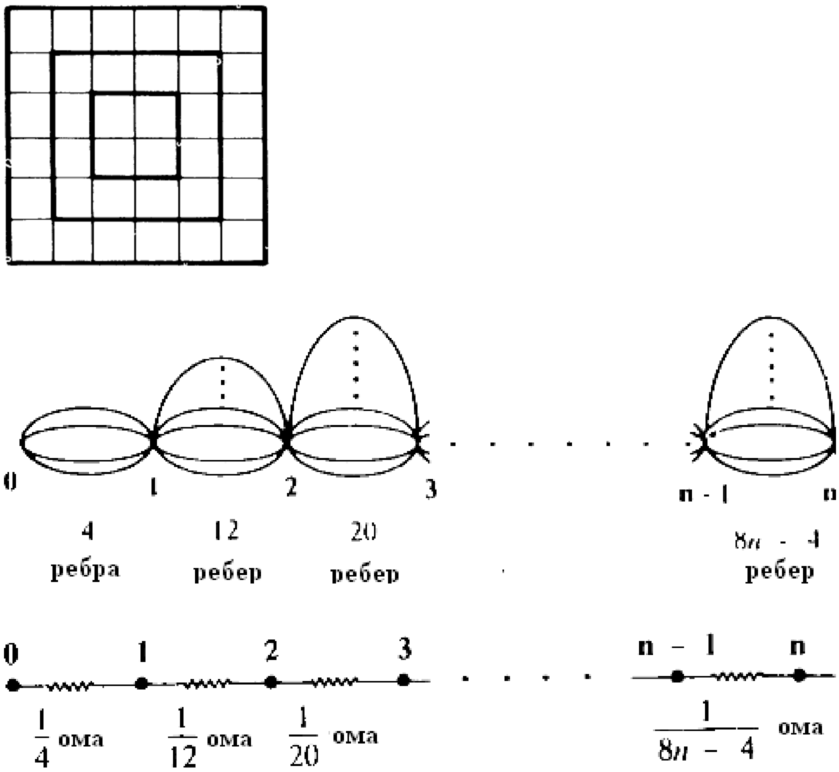


Рис. 17: Объединение в квадратной цепи и эквивалентная цепь; см решение задачи 1.2.9.

1.2.10 *Указание.* Пусть P — вероятность того, что при случайном блуждании по 2-мерной решетке мы вернемся в начальную точку. Обозначим за P_n вероятность того, что случайное блуждание вернется в начальную точку до достижения граничных точек квадрата $2n\times 2n$ с центром в начальной точке. Предположим, что все эти вероятности существуют. Ясно, что $P_n \leq P \leq 1$ для каждого n. Из физической интерпретации вероятности получаем, что $P_n = 1 - C/4$, где C — эффективное сопротивление между центром и границей квадрата $2n \times 2n$. Из решения задачи 1.2.9(B) следует, что C стремится к нулю при стремлении n к бесконечности. Поэтому $P_n \to 1$ при $n \to \infty$ и P равно 1. $\square$

1.3.1 *Указание.* Докажите по индукции, что сопротивление бинарного дерева глубины n из единичных резисторов равно $1 - \frac{1}{2^n}$.

1.3.2 *Указание.* Потенциалы в точках, расположенных на одинаковом расстоянии от корня дерева, равны из симметрии. Объединив такие точки в бинарном дереве, получим цепь, изображенную на рисунке 18. Ее сопротивление равно $\frac{1}{2} \cdot n = \frac{n}{2}$. Для

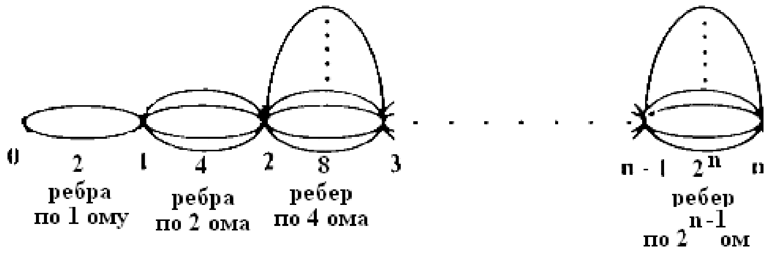


Рис. 18: Подсчет сопротивления дерева; см решение задачи 1.3.2.

троичного дерева аналогично получаем $R = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n}$. Отсюда $R = 1 - \frac{2^n}{3^n}$.

1.3.3 *Указание.* Двоичное дерево глубины 3 вырезать не сложно. Покажем, что двоичное дерево глубины 2010 вырезать нельзя. Если его удалось вырезать, то все его вершины расположены на расстоянии не более 2010 от корня; отсюда получаем, что дерево находится в кубе со стороной $2 \cdot 2010 + 1$. Поэтому число его вершин не превосходит $4021^3 \le 2^{36}$. С другой стороны, число его вершин равно $2^{2011} - 1$. Полученное противоречие завершает доказательство. Задача о вырезании модифицированного дерева решается не просто.

1.3.4 *Указание.* Двоичное дерево вырезать нельзя; рассуждайте аналогично решению задачи 1.3.3, пользуясь тем, что более двух вершин склеиться не могут. Модифицированное двоичное дерево можно вырезать из плоскости (см рисунок 19), а троичное из пространства аналогичным образом (см рисунок 20). Доказательство проводится индукцией по глубине дерева.

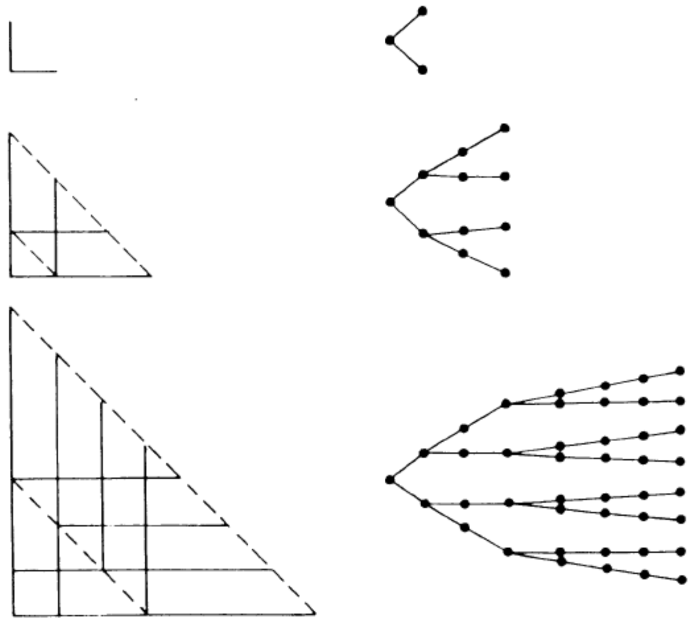


Рис. 19: Вырезание двоичного дерева с пересечениями из плоскости; см решение задачи 1.3.4.

1.3.5 *Указание.* Для любого $n = 2^i - 1$ рассмотрим множество вершин (x, y, z), где $|x| + |y| + |z| \le n$. Пусть R_i — сопротивление между началом координат и границей такой фигуры. Как известно из задачи 1.3.4, из такой части решетки можно вырезать модифицированное троичное дерево глубины i с пересечениями ребер на равном рас-

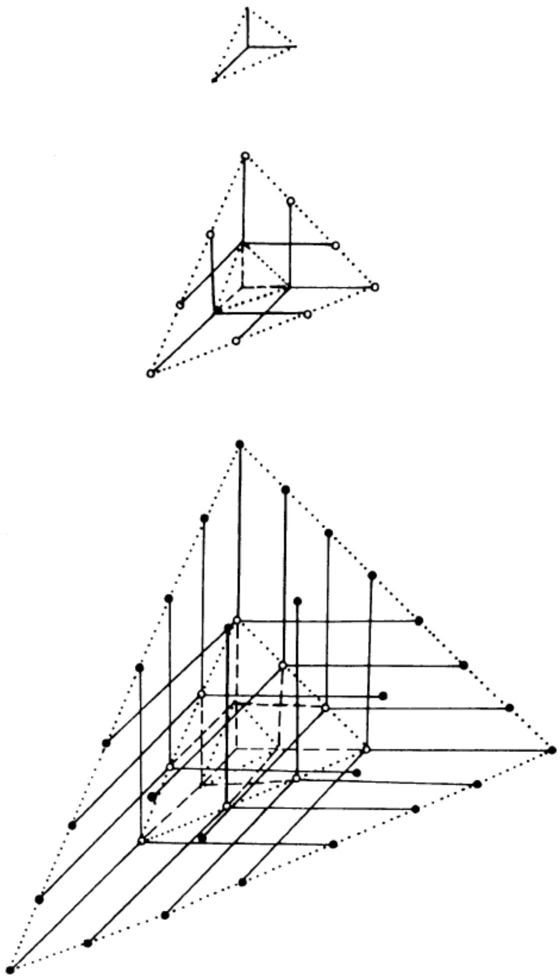


Рис. 20: Вырезание троичного дерева с пересечениями из пространства; см решение задачи 1.3.4.

стоянии от корня. Легко заметить, что сопротивление дерева с такими пересечениями равно сопротивлению такого же дерева без пересечений. Как известно из задачи 1.3.2, сопротивления модифицированных троичных деревьев не превосходят 1. Поэтому не превосходят 1 и сопротивления вырезаемых деревьев с пересечениями. Из закона монотонности получаем, что $R_i \leq 1$. Значит, при подключении батарейки в 1 вольт ток будет не меньше 1. Следовательно, потенциалы в вершинах, соседних с началом координат будут не больше $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Они равны вероятности возврата в начало координат до попадания на границу. Переходя к пределу, получаем требуемое.

3.2. Разрезания прямоугольника

2.1.1 Занумеруем квадраты (полки) как показано на рис. 21. Можно считать, что вертикальная сторона большого прямоугольника (шкафа) равна 1. Горизонтальную сторону большого прямоугольника обозначим через x. Тогда искомое отношение сторон равно $R = 1/x$. Сторону квадрата номер k обозначим через x_k.

К левой стороне большого прямоугольника примыкают квадраты 2, 3 и 8, откуда $x = x_2 + x_3 + x_8$. К правой стороне квадрата 3 примыкают квадраты 1 и 4: $x_3 = x_1 + x_4$. Аналогично, $x_6 + x_8 = x_7$, $x_1 + x_2 = x_5 + x_6$, $x_4 + x_5 = x_9$. Сформулируем наше наблюдение в общем виде:

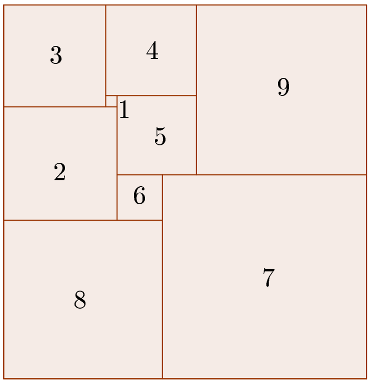


Рис. 21: Разрезание прямоугольника на 9 неравных квадратов

Условие вертикальной стыковки. *Для каждого вертикального разреза сумма вертикальных сторон прямоугольников, примыкающих к разрезу слева, равна сумме вертикальных сторон прямоугольников, примыкающих справа. Вертикальная сторона большого прямоугольника равна сумме вертикальных сторон примыкающих к ней прямоугольников.*

Глядя на схему разрезания, можно написать аналогичные уравнения, описывающие примыкание квадратов друг к другу горизонтальными сторонами:

Условие горизонтальной стыковки. *Для каждого горизонтального разреза сумма горизонтальных сторон прямоугольников, примыкающих к разрезу сверху, равна сумме горизонтальных сторон прямоугольников, примыкающих снизу. Горизонтальная сторона большого прямоугольника равна сумме горизонтальных сторон примыкающих к ней прямоугольников.*

Из этого условия: $1 = x_3 + x_4 + x_9$, $x_4 = x_1 + x_5$, $x_1 + x_3 = x_2$, $x_5 + x_9 = x_6 + x_7$, $x_2 + x_6 = x_8$.

Итак, нахождение отношения сторон прямоугольника сводится к решению системы уравнений, в нашем случае:

$$\begin{aligned}
&x = x_2 + x_3 + x_8, \quad x_3 = x_1 + x_4, \quad x_6 + x_8 = x_7, \quad x_1 + x_2 = x_5 + x_6, \quad x_4 + x_5 = x_9,\\
&x_3 + x_4 + x_9 = 1, \quad x_4 = x_1 + x_5, \quad x_1 + x_3 = x_2, \quad x_5 + x_9 = x_6 + x_7, \quad x_2 + x_6 = x_8.
\end{aligned}$$

Проиллюстрируем известный алгоритм Гаусса–Жордана решения системы линейных уравнений на нашем примере. Наша цель — преобразовать систему так, чтобы каждая неизвестная участвовала ровно в одном уравнении. Для неизвестной x это уже выполнено — она содержится только в первом уравнении.

Перейдем ко второму уравнению. В нем неизвестная x_3 выражена через x_1 и x_4. Подставим это выражение в другие уравнения системы, содержащие неизвестную x_3 — в первое, шестое и восьмое. Получим систему:

$$\begin{aligned}
&x = x_2 + x_1 + x_4 + x_8, \quad x_3 = x_1 + x_4, \quad x_6 + x_8 = x_7, \quad x_1 + x_2 = x_5 + x_6, \quad x_4 + x_5 = x_9,\\
&x_1 + 2x_4 + x_9 = 1, \quad x_4 = x_1 + x_5, \quad 2x_1 + x_4 = x_2, \quad x_5 + x_9 = x_6 + x_7, \quad x_2 + x_6 = x_8.
\end{aligned}$$

Она равносильна исходной. Но теперь неизвестная x_3 участвует только во втором уравнении.

Перейдем к третьему уравнению. Подставляя выражение $x_7 = x_6 + x_8$ в девятое уравнение, получим систему, содержащую x_7 только в третьем уравнении:

$$x = x_2 + x_1 + x_4 + x_8,\quad x_3 = x_1 + x_4,\quad x_6 + x_8 = x_7,\quad x_1 + x_2 = x_5 + x_6,\quad x_4 + x_5 = x_9,$$
$$x_1 + 2x_4 + x_9 = 1,\quad x_4 = x_1 + x_5,\quad 2x_1 + x_4 = x_2,\quad x_5 + x_9 = 2x_6 + x_8,\quad x_2 + x_6 = x_8.$$

Будем продолжать таким же образом дальше. Каждый раз будем выражать одну из неизвестных в очередном уравнении через остальные. Будем подставлять полученное выражение в другие уравнения. В полученной системе выбранная неизвестная будет присутствовать только в одном уравнении. После этого процесс продолжается[4].

В итоге мы получим систему "уравнений" (проверьте!):

$$x = 33/32,\quad x_3 = 9/32,\quad x_7 = 1/2,\quad x_1 = 1/32,\quad x_4 = 1/4,$$
$$x_9 = 15/32,\quad x_5 = 7/32,\quad x_2 = 5/16,\quad x_8 = 7/16,\quad x_6 = 1/8.$$

Тем самым решение исходной системы найдено. Итак, в примере 3 отношение сторон большого прямоугольника равно $R = 1/x = 32/33$. Значения неизвестных $x_1, \dots, x_9$ — это стороны квадратов. Тем самым мы получили пример разрезания прямоугольника на попарно различные квадраты.

2.1.5 См., например, статью [15].

2.1.6 **(B)** Приведем решение, использующее случайные блуждания. Другие решения намечены в пункте (A) и в задаче 2.2.5.

Рассмотрим случайное блуждание по электрической цепи. Пусть $P_T(x)$ — вероятность того, что, стартуя из вершины x и делая T шагов, мы достигнем положительного полюса батареи раньше, чем отрицательного. Ясно, что при фиксированном x последовательность $P_T(x)$ возрастает, значит, имеет предел $P(x)$. Функция $P(x)$ удовлетворяет аксиомам 1–2.

Замечание. Существование и единственность решения системы Кирхгофа — фундаментальные факты. Например, из единственности решения следует теорема Дена о том, что прямоугольник с иррациональным отношением сторон нельзя разрезать на квадраты. Из существования решения (в непрерывном случае) следует теорема Римана о конформном отображении [6].

2.2.1 Рассмотрим разрезание квадрата, изображенное на рисунке 14. Найдем отношение сторон R прямоугольников разрезания. Пусть сторона квадрата равна 1. Тогда последовательно находим $AB = 1/3$, $AC = R/3$, $CD = 1 - R/3$, $DE = R - R^2/3$. С другой стороны, $DE = 1/2$, значит, $R - R^2/3 = 1/2$. Решая квадратное уравнение, находим $R = (3 \pm \sqrt{3})/2$.

2.2.3 Рассмотрим некоторое разрезание. Растянем картинку в R раз по горизонтали. Получим прямоугольник с отношением сторон R, разрезанный на квадраты и прямоугольники с отношением сторон R^2. Рассмотрим соответствующую электрическую цепь. Согласно теореме о сопротивлении цепи число R можно выразить через числа

[4] Вообще говоря, возможно, что после нашей подстановки все неизвестные в некотором уравнении сократятся, и оно примет вид $0 = 0$. В этом случае выбросим его из системы. Если же в результате подстановки получилось уравнение, в котором правая часть — ненулевое число, а все коэффициенты в левой части нулевые, то это означает, что исходная система не имеет решений.

1 и R^2, пользуясь только четырьмя арифметическими действиями. Это означает, что найдутся два ненулевых многочлена $p(x)$ и $q(x)$ с целыми коэффициентами, такие что $R = \frac{p(R^2)}{q(R^2)}$. Значит, $q(R^2) \cdot R - p(R^2) = 0$. Получаем, что число R — корень многочлена $q(x^2) \cdot x - p(x^2)$. Последний многочлен имеет целые коэффициенты. Он ненулевой, так как многочлены $p(x^2)$ и $q(x^2)$ — ненулевые, причҷм в многочлен $p(x^2) \cdot x$ переменная x входит только в нечҷтной степени, а в многочлен $q(x^2)$ — только в чҷтной. Утверждение доказано.

2.2.4 (B) Нам потребуется такая лемма.

Лемма. *Пусть* $1 + \sqrt{2}$ *— корень многочлена с целыми коэффициентами. Тогда* $1 - \sqrt{2}$ *— тоже корень этого многочлена.*

Докажем лемму. Подставив в наш многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами вместо x число $1 + \sqrt{2}$, получим выражение вида $m + \sqrt{2}n$, где m и n — целые числа. Должны получить 0, и так как $\sqrt{2}$ иррационально, имеем $n = 0$ и $m = 0$. Если же мы подставим в $P(x)$ вместо x число $1-\sqrt{2}$, то получим выражение $m-\sqrt{2}n$ (подумайте, почему). Так как $n = m = 0$, то снова получим 0, и значит $P(x)$ имеет корнем также и число $1 - \sqrt{2}$.

Вот другое доказательство леммы. Пусть $P(1 + \sqrt{2}) = 0$, где $P(x)$ — некий многочлен с целыми коэффициентами. Заметим, что число $1 + \sqrt{2}$ является также корнем многочлена $(x - (1 + \sqrt{2}))(x - (1 - \sqrt{2})) = x^2 - 2x - 1$. Поделим многочлен $P(x)$ на $x^2 - 2x - 1$ в столбик, получим в остатке некий многочлен $ax + b$ не более чем первой степени с рациональными коэффициентами: $P(x) = Q(x)(x^2 - 2x - 1) + ax + b$. Подставим в это равенство $x = 1 + \sqrt{2}$. Получим, что $a(1 + \sqrt{2}) + b = 0$, откуда, так как $1 + \sqrt{2}$ иррационально, $a = 0$, а значит и $b = 0$. Поэтому $P(x)$ делится на $x^2 - 2x - 1$, а значит имеет корнем также и число $1 - \sqrt{2}$.

Докажем теперь утверждение задачи. Предположим, что квадрат разрезан на прямоугольники с отношениями сторон $1 + \sqrt{2}$ и $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Растянем его в $1 + \sqrt{2}$ раз по горизонтали. Получим разрезание прямоугольника с отношением сторон $1 + \sqrt{2}$. Рассмотрим соответствующую электрическую цепь. Она состоит из резисторов сопротивлением 1 и $(1 + \sqrt{2})^2$, и имеет сопротивление $1 + \sqrt{2}$. Согласно теореме о сопротивлении цепи, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $q(x)$ с целыми коэффициентами, что $1+\sqrt{2} = \frac{p((1+\sqrt{2})^2)}{q((1+\sqrt{2})^2)}$. Значит, $q((1+\sqrt{2})^2) \cdot (1+\sqrt{2}) - p((1+\sqrt{2})^2) = 0$. Согласно предыдущей лемме, $q((1 - \sqrt{2})^2) \cdot (1 - \sqrt{2}) - p((1 - \sqrt{2})^2) = 0$, то есть $\frac{p((1-\sqrt{2})^2)}{q((1-\sqrt{2})^2)} = 1 - \sqrt{2}$.

Заменим теперь в нашей цепи все резисторы сопротивлением $(1 + \sqrt{2})^2$ на резисторы сопротивлением $(1 - \sqrt{2})^2$. Сопротивление полученной цепи равно $\frac{p((1-\sqrt{2})^2)}{q((1-\sqrt{2})^2)}$. По доказанному выше, это число равно $1 - \sqrt{2}$. Мы получили, что сопротивление цепи из резисторов с положительными сопротивлениями отрицательно. Это противоречит задаче 2.1.7. Значит, требуемое разрезание невозможно. Утверждение задачи доказано.

2.2.5 См., например, статьи [9, 15, 2].

2.2.7 *Замечание.* Посмотрим внимательно на рассуждение из решения задачи 2.2.4(B).

Противоречие возникло из-за того, что число $1-\sqrt{2}$, *алгебраически сопряженное* числу $R=1+\sqrt{2}$, отрицательно. (Число z называется *алгебраически сопряженным* числу R, если оно является корнем многочлена минимальной степени с целыми коэффициентами, имеющего корень R.) Это — проявление следующей общей закономерности:

Теорема Ласковича–Ринна–Секереша–Фрайлинга (1994) [11, 13] *Для числа* $R>0$ *следующие три условия эквивалентны:*

1) Квадрат можно разрезать на прямоугольники с отношением сторон R *и* $\frac{1}{R}$.

2) Для некоторых положительных рациональных чисел c_i *выполнено равенство*

$$c_1R+\cfrac{1}{c_2R+\cfrac{1}{c_3R+\cdots+\cfrac{1}{c_nR}}}=1.$$

3) Число R *является корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами, причем все комплексные числа, алгебраически сопряженные числу* R, *имеют положительную действительную часть.*

Доказательство этой теоремы выходит за рамки настоящего курса. Отметим только, что ее можно доказать в целом аналогично предыдущей задаче, используя цепи *переменного* тока [15].

3.3. Благодарности

Большинство задач частей 1 и 2 заимствованы из статьи П. Дойля и Дж. Снелл [9], а также автора и М. Прасолова [14], соответственно. Решения задач части 1 заимствованы из [3].

4. Список литературы

[1] А. Варламов, Правила Кирхгофа, *Квант* є1 (1985).

[2] О. Ляшко, Почему не уменьшится сопротивление, *Квант* (1985).

[3] D. Baranov, A. Ustinov, M. Skopenkov, Random walks through electric networks, 22th Summer conference of the International mathematical Tournament of towns, `http://olympiads.mccme.ru/lktg/2010/4/index.htm`.

[4] I. Benjamini and O. Schramm, Random walks and harmonic functions on infinite planar graphs using square tilings, Ann. Prob. **24:3** (1996), 1219–1238.

[5] R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone, and W. T. Tutte, The dissection of rectangles into squares, Duke Math. J. **7** (1940), 312–340.

[6] J. Cannon, W. Floyd, W. Parry, Squaring rectangles: the finite Riemann mapping theorem, Contemp. Math. **169** (1994), 133–211.

[7] R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy, Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Math. Ann., **100**, (1928), 32–74. English transl.: IBM Journal (1967), 215–234. Russian transl.: Russ. Math. Surveys **8** (1941), 125–160. http://www.stanford.edu/class/cme324/classics/courant-friedrichs-lewy.pdf

[8] M. Dehn, über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke, Math. Ann. **57** (1903), 314–332 (in German).

[9] P. G. Doyle and J. L. Snell, Random walks and electric networks, Mathematical Association of America, 1984, http://arxiv.org/abs/math.PR/0001057.

[10] R. M. Foster, Academic and Theoretical Aspects of Circuit Theory, Proc. IRE **50:5** (1962), 866–871.

[11] C. Freiling and D. Rinne, Tiling a square with similar rectangles, Math. Res. Lett. **1** (1994), 547–558.

[12] R. Kenyon, Tilings and discrete Dirichlet problems, Israel J. Math. **105:1** (1998), 61–84.

[13] M. Laczkovich and G. Szekeres, Tiling of the square with similar rectangles, Discr. Comp. Geom. **13** (1995), 569–572.

[14] M. Prasolov and M. Skopenkov, Dissections of a metal rectangle, Kvant (2011) (in Russian), submitted, http://arxiv.org/abs/1011.3180.

[15] M. Prasolov and M. Skopenkov, Tilings by rectangles and alternating current, *J. Combin. Theory A* **118:3** (2011), 920–937, http://arxiv.org/abs/1002.1356.

[16] F. Spitzer, Principles of random walks, Springer–Verlag, 1976.