Отображения окружности и цепные дроби

Сопряжение отображений

Н. Б. Гончарук,
Ю. Г. Кудряшов

1 Сопряжение отображений

Определение 1 Пусть между элементами множеств X и Y есть соответствие, которое задаётся взаимно-однозначным отображением $h\colon X \to Y$ (элементу $x \in X$ соответствует элемент $h(x) \in Y$).
Рассмотрим любое отображение $f : X \to X$. Заменим все элементы множества X на соответствующие элементы множества Y. Тогда отображение f превратится в некоторое отображение $g\colon Y \to Y$. Говорят, что отображение $h\colon X \to Y$ *сопрягает* отображения $f : X \to X$ и $g\colon Y \to Y$.
Другими словами, взаимно-однозначное отображение $h\colon X \to Y$ *сопрягает* отображения $f : X \to X$ и $g\colon Y \to Y$, если $h \circ f = g \circ h$, то есть для любого $x \in X$ выполнено $h(f(x)) = g(h(x))$.

1. Пусть отображение h сопрягает f и g. Докажите, что отображение h сопрягает

   (a) обратные отображения f^{-1} и g^{-1};
   (b) итерационные степени $f^n = f \circ \ldots \circ f$ и $g^n = g \circ \ldots \circ g$.
   (c) Докажите, что тождественное отображение $\mathrm{id}\colon x \mapsto x$ сопряжено только с тождественными.

2. На рисунке изображён график отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Постройте график отображения, полученного при сопряжении отображения f

   (a) сдвигом $x \mapsto x + a$; (b) растяжением $x \mapsto 2x$; (c) сжатием $x \mapsto x/3$.

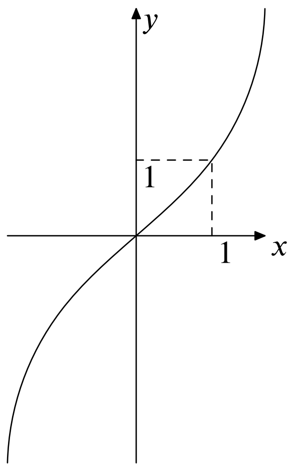

Рисунок 1 График к задаче 2

3. Пусть отображение h сопрягает отображения f и g, x — неподвижная точка отображения f.

   (a) Докажите, что $h(x)$ — неподвижная точка отображения g.
   (b) Пусть f, g и h — дифференцируемые отображения прямой в себя. Что можно сказать о производных f и g в неподвижных точках x и $h(x)$?

4. Найдите непрерывное взаимно-однозначное отображение $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сопрягающее отображения прямой в себя $x \mapsto 2x$ и $x \mapsto 3x$. Может ли такое отображение быть дифференцируемым в нуле?

5. Докажите, что для следующих пар отображений окружности *не существует* непрерывного отображения окружности, которое их сопрягает.

   (a) Поворот на угол π и поворот на угол $3\pi/4$.
   (b) Поворот на угол π и отображение $\varphi \mapsto \varphi + \pi + 0.1 \sin \varphi$.

Отображения окружности и цепные дроби

Число вращения

Н. Б. Гончарук,
Ю. Г. Кудряшов

2 Число вращения

В этом листке окружность — это отрезок [0,1] со склеенными концами (другими словами, фактор-множество $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ прямой $\mathbb{R}$ по действию группы $\mathbb{Z}$). Обозначение f^n мы используем для итерационной степени отображения f: $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$.

Определение 1 Пусть f — непрерывное отображение окружности в себя. *Поднятием* отображения f на прямую называется такое непрерывное отображение $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(\{x\}) = \{F(x)\}$ для любого x.

1. Докажите, что любые два поднятия F_1, F_2 одного и того же отображения $f : S^1 \to S^1$ отличаются на целое число: $F_1(x) = F_2(x) + n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 2 Пусть отображение $f : S^1 \to S^1$ взаимно-однозначно, непрерывно и сохраняет ориентацию. *Числом вращения* отображения f называется предел

$$\rho(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{[F^n(x) - x]}{n}. \qquad (1)$$

Геометрический смысл этого предела следующий: $[F^n(x) - x]$ — количество *полных* оборотов, сделанных точкой x за n итераций, поэтому число вращения — это в некотором смысле средняя скорость движения точки окружности.

2. Докажите, что при выборе другого поднятия к числу вращения добавляется целое число. Таким образом, число вращения определено только с точностью до прибавления целого числа.

3. Докажите, что число вращения поворота R_φ на угол φ, $R_\varphi(x) = x + \varphi$, равно φ.

4*. Докажите, что предел (1) существует.

5. Докажите, что предел (1) не зависит от точки x и равен пределу $\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n}$.

6. Как связаны числа вращения отображений f и f^n?

7. Докажите, что число вращения равно нулю тогда и только тогда, когда у отображения f есть неподвижная точка.

8. Докажите, что число вращения рационально тогда и только тогда, когда у отображения f есть периодическая орбита.

9. Докажите, что если число вращения отображения f иррационально, то точки x, $f(x)$, $f^2(x)$, … упорядочены на окружности таким же образом, как точки x, $R_\varphi(x)$, $R_\varphi^2(x)$, …, где $\varphi = \rho(f)$.

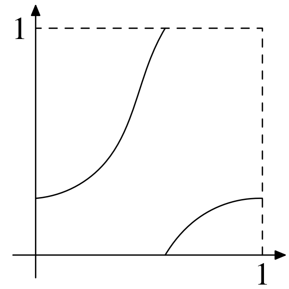

График отображения окружности

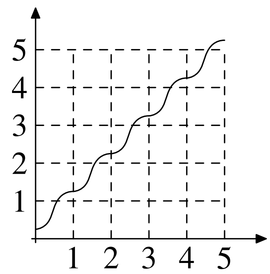

График его поднятия на прямую

Рисунок 2 График отображения окружности и его поднятия