ВВЕДЕНИЕ В АДЕЛЬНУЮ ДЕМОКРАТИЮ

Г.Б.Шабат

В школе нам всем прививается ошибочное представление о том, что на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ имеется единственное естественное расстояние (*модуль разности*), относительно которого все арифметические операции *непрерывны.* Однако существует ещё бесконечное множество расстояний, так называемых *p-адических,* по одному на каждое простое число p. Согласно *теореме Островского,* "обычное" расстояние вместе со всеми p-адическими уже действительно исчерпывают все разумные расстояния на $\mathbb{Q}$.

Термин *адельная демократия* введён Ю.И.Маниным. Согласно принципу адельной демократии, все разумные расстояния на $\mathbb{Q}$ равны перед законами математики (может быть, лишь традиционное *чуть-чуть равнее...*). В курсе будет введено *кольцо аделей,* позволяющее работать со всеми этими расстояниями одновременно.

Цель курса – строго ввести упомянутые понятия и на нескольких содержательных примерах показать, как они работают.

Г.Б.Шабат предполагает провести четыре занятия. В основном они будут проходить в лекционной форме.

Примерная программа.

1. Кольца и поля; топологии и нормы на них. Определение p-адических норм на $\mathbb{Q}$ и полей p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Теорема Островского. Кольцо аделей $\mathbb{A}$ и диагональное вложение $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A}$; дискретность образа.

2. Кольцо $\mathbb{Q}[[x]]$ формальных степенных рядов и "элементарные функции" в нём. Формальная тригонометрия и её обобщения. Сходимость степенных рядов над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{Q}_p$. Элементарные функции над $\mathbb{Q}_p$. Дзета-функция и её p-адические аналоги (кратко).

3. Адельная динамика. Фракталы как проекции в архимедов мир множеств из адельного мира. Комплексные и p-адические множества Жюлиа. Адельная энтропия. Бифуркационная диаграмма и 2-адическое время.

4. Интегрирование в локально-компактных группах. Группа SL_2. Адельный смысл формулы Эйлера $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (по Ю.И.Манину).