Квантовые группы, узлы и полином Джонса.

Лекция 1. Алгебры Хопфа

План:

1) Алгебры Ли и их обертывающие алгебры
2) Алгебры Хопфа. Мотивация.
3) Алгебры Хопфа. Определение

Осн. поле $\mathbb{C}$.

1.1) Определение алгебры Ли: алгебра Ли $\mathfrak{g}$ — векторное пространство с билинейной операцией $[\cdot,\cdot]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, к-ая кососимметрична: $[x,y]=-[y,x]$ и удовлетворяет тождеству Якоби $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$

Пример: V-вект. пр-во $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{gl}(V)=End(V)$ с $[x,y]=xy-yx$.

$$\mathfrak{sl}(V)=\{x\in\mathfrak{gl}(V) \mid tr\, x=0\}$$

Имеем естеств. понятия подалгебры, идеала, гомоморфизма и т.п.

1.2) Представления и их тензорные произведения.

Опр: представление $\mathfrak{g}$ в пространстве V — гомоморфизм $\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ (можем мыслить как задание умножения элементов из V на элементы из $\mathfrak{g}$; если мы смотрим на V таким образом, то мы говорим, что V — $\mathfrak{g}$-модуль)

Операции над представлениями: под-, фактор-представления, прямые суммы

Кроме того, м-м брать тензорные представления, двойственные представления и есть тривиальное представление. Далее для $x\in\mathfrak{g}$ и представления V через x_V обозначаем оператор, к-ым x действует на V. Означенные представления задаются следующим образом:

$x_{V_1\otimes V_2}=x_{V_1}\otimes 1_{V_2}+1_{V_1}\otimes x_{V_2}$, $x_{V^*}=-x_V^*$ (где $x_V^*: V^*\to V^*$ — отображение, сопряж. x_V: $\langle x_V^* f, v\rangle=\langle f, x_V v\rangle$), $x_{triv}=0$ (и $triv=\mathbb{C}$)

Эту конструкцию уместно сравнить с конструкцией для групп. А именно, для группы G имеем: $g_{V_1\otimes V_2}=g_{V_1}\otimes g_{V_2}$, $g_{V^*}=(g_V^*)^{-1}$, $g_{triv}=1$

На самом деле, формулы для алгебр Ли получаются из формул для групп дифференцированием, но этого мы обсуждать не будем

1.3) Универсальная обертывающая алгебра

Наша задача для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определить ассоциативную алгебру аналогичную групповой алгебре для группы. Напомним, что для группы G можно построить алгебру $\mathbb{C}G$ с базисом G и умножением элементов как в G. Эта алгебра удовлетворяет универсальному свойству: для отображения $G \to A$, переводящего 1 в 1 и уважающего умножение существует единственный гомоморфизм алгебр $\mathbb{C}G \to A$ делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{C}G \arrow[d, dashed] \\ & A \end{tikzcd}$$

В частности, представление группы G есть то же самое, что и представление $\mathbb{C}G$.

Аналогичная алгебра для $\mathfrak{g}$ называется универсальной обертывающей алгеброй и обозначается $U(\mathfrak{g})$. По определению, $U(\mathfrak{g})$ – это фактор тензорной алгебры $T(\mathfrak{g})$ по соотношениям $x\otimes y - y\otimes x - [x,y]$. Отметим, что имеется естественный гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$. Опять, гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \to A$, где A – ассоциативная алгебра с 1, однозначно пропускается через $U(\mathfrak{g})$.

Первый факт про $U(\mathfrak{g})$ – описание базиса. А именно, если $x_1 \dots x_n$ – базис в $\mathfrak{g}$, то базисом в $U(\mathfrak{g})$ являются упорядоченные мономы $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$; $m_1, \dots, m_n \geq 0$. Это теорема PBW (Poincare-Birkhoff-Witt)

2) Алгебры Хопфа. Мотивация

2.1) Тензорные произведения.

Пусть A – ассоц. алгебра с 1. Если $A = \mathbb{C}G$ или $U(\mathfrak{g})$, то для A-модулей определено тензорное произведение (а также двойственное и тривиальное представление). Вопрос, а можно ли определить такие операции для общей ассоциативной алгебры (имея только эту структуру). Ответ: нет.

Если V_1, V_2 – A-модули, то $V_1 \otimes V_2$ имеет естественное представление алгебры $A\otimes A$: $(a_1\otimes a_2)_{V_1\otimes V_2} = (a_1)_{V_1}\otimes(a_2)_{V_2}$. Таким образом, чтобы задать представление A в $V_1\otimes V_2$ достаточно фиксировать гомоморфизм $\Delta: A\to A\otimes A$. И такой гомоморфизм есть в наших примерах:

$$\Delta: \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G\otimes\mathbb{C}G,\quad \Delta(g) := g\otimes g,\ g\in G.$$

$$\Delta: U(\mathfrak{g})\to U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g}),\quad \Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x,\ x\in\mathfrak{g}.$$

Второе отображение задано только на образующих. Чтобы проверить, что оно действительно продолжается до гомоморфизма алгебр нам надо проверить, что оно сохраняет соотношения. Очевидно, что $\Delta(x)$ линейно по x и, кроме того, $\Delta([x,y]) = [\Delta(x),\Delta(y)]$. Поэтому Δ действительно задает гомоморфизм.

Аналогичная ситуация с V^*. Можем положить $a_{V^*} = a_V^*$, т.е. $\langle a_{V^*}f, v\rangle = \langle f, a_V v\rangle$, но это сопоставление задает представление не алгебры A, а алгебры A^{opp} с умножением в обратном порядке. Т.о. для того, чтобы задать представление A в V^* нужен гомоморфизм алгебр $S: A\to A^{opp}$. В наших примерах $S(g) = g^{-1}$ для $A=\mathbb{C}G$ и $S(x) = -x$ в $A = U(\mathfrak{g})$. Наконец, для задания тривиального представления нужен гомоморфизм $\varepsilon: A\to\mathbb{C}$ ($\varepsilon(g)=1$ для $A=\mathbb{C}G$, $\varepsilon(x)=0$ для $A=U(\mathfrak{g})$).

Безусловно, эта дополнительная структура, Δ, S, ε, должна удовлетворять дополнительным аксиомам. Об этом следующий пункт.

2.2) Двойственность. Пусть A - конечномерная ассоциативная алгебра с 1. Можем рассмотреть двойственное пространство A^*. Вопрос: какие структуры на A^* задает структура алгебры с 1 на A.

Умножение m можно рассматривать как линейное отображение $A\otimes A\to A$. Соответственно, имеем двойственное отображение (коумножение) $m^*: A^*\to A^*\otimes A^*$. Ассоциативность умножения m можно записать как коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes m"'] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\
A\otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}$$

Соответственно, m^* коассоциативно:
$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[r, "m^*"] \arrow[d, "m^*"] & A^*\otimes A^* \arrow[d, "m^*\otimes id"] \\ A^*\otimes A^* \arrow[r, "id\otimes m^*"] & A^*\otimes A^*\otimes A^* \end{tikzcd}$$

Коммутативность m — это коммутативность диаграммы
$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "m"'] & & A\otimes A, \arrow[dl, "m"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

где $\sigma(a_1\otimes a_2)=a_2\otimes a_1$. Двойственным образом, получаем определение кокоммутативности m^*.

Перейдем к 1. Элемент $1\in A$ можно трактовать как отображение $e: \mathbb{C}\to A$, $z\mapsto z\cdot 1$. Аксиома единицы переписывается в виде
$$\begin{tikzcd} & A\otimes A \arrow[d, "m"] & \\ \mathbb{C}\otimes A \arrow[ur, "e\otimes id"] \arrow[r, "="] & A & A\otimes\mathbb{C} \arrow[ul, "id\otimes e"'] \arrow[l, "="'] \end{tikzcd}$$

Дуализируя, получаем коединицу, отображение $e^*: A^*\to\mathbb{C}$ с
$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\otimes A^* & A^* \arrow[l, "="'] \arrow[r, "="] \arrow[d, "m^*"] & A^*\otimes\mathbb{C} \\ & A^*\otimes A^* \arrow[ul, "id\otimes e^*"] \arrow[ur, "id\otimes e^*"'] & \end{tikzcd}$$

3.1) Биалгебры. Теперь мы уже готовы дать определение биалгебры, структуры несколько более сложной, чем алгебра.

Опр. Биалгебра — это ассоциативная алгебра с единицей (A,m,e), снабженная дополнительно отображениями коумножения $\Delta: A\to A\otimes A$ и коединицы $\varepsilon: A\to\mathbb{C}$ т.ч.

(1) Δ, ε удовлетворяют аксиомам коассоциативности и коединицы выше

(2) Δ, ε — гомоморфизмы алгебр с 1.

Хотя наше определение не совсем симметрично относительно двойственности $(A^*, \Delta^*, \varepsilon^*, m^*, e^*)$ снова является биалгеброй. Так, например, $(\mathbb{C}G)^*$ — это (коммутативная) алгебра $\mathbb{C}[G]$ функций на группе с поточечным умножением и коумножением $\mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}[G]=\mathbb{C}[G\times G]$ $\Delta f(g,h)=f(gh)$. Отметим, что алгебра $\mathbb{C}[G]$, вообще говоря, не является кокоммутативной.

Отметим также что для тензорных произведений представлений

~~[illegible]~~ Коассоциативность означает, что естественный изоморфизм $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \longrightarrow V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$, $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \to v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ является A-линейным. Но естественный изоморфизм $V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ не обязан быть A-линейным.

3.2) Антипод. Алгебра Хопфа — это биалгебра снабженная дополнительной структурой — антиподом S, который должен быть гомоморфизмом алгебр $A \to A^{op}$, ~~такой~~ к-рый делает следующие две диаграммы коммутативными:

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A & \xrightarrow{S \otimes id} & A \otimes A \\ \Delta \uparrow & & \downarrow m \\ A & \xrightarrow[e \circ \varepsilon]{} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A\otimes A & \xrightarrow{id \otimes S} & A \otimes A \\ \Delta \uparrow & & \downarrow m \\ A & \xrightarrow[e \circ \varepsilon]{} & A \end{array}$$

Для $A = \mathbb{C}G$ равенство $m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = e \circ \varepsilon$ записывается так

$g \xmapsto{\Delta} g \otimes g \xrightarrow{S \otimes id} g^{-1} \otimes g \xmapsto{m} 1$. Т.о. антипод — это взятие обратного элемента на языке алгебр Хопфа.

Обе алгебры A: $\mathbb{C}G$ и $U(\mathfrak{g})$ являются алгебрами Хопфа относительно введенных выше операций Δ, ε, S. Сделаем для проверки, что Δ для $A = U(\mathfrak{g})$ коассоциативно, т.е $(\Delta \otimes id)\Delta(u) = (id \otimes \Delta)\Delta(u)$ $\forall u \in U$ достаточно проверить это на генераторах: $x \in \mathfrak{g}$, где это непосредственная проверка.

Замеч: Обратный к обратному должен быть тождественным, т.е S^2 должно быть равно id. Это действительно так, когда A коммутативна, но может нарушаться в общем случае. Пример на следующей лекции.

Замеч: в определении алгебры Хопфа только Δ является дополнительной структурой: ε и S восстанавливаются по Δ (и m) единственным образом