Квантовые группы, узлы и полином Джонса.

Лекция 2: $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

План:
1) $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ как алгебра Хопфа
2) Представления
3) R-матрица.

1.1) <u>$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ как ассоциат. алгебра.</u> Алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2$ имеет базис $e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $f=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ с соотношениями коммутирования $[h,e]=2e$, $[h,f]=-2f$, $[e,f]=h$. Поэтому $U(\mathfrak{sl}_2)=\mathbb{C}\langle e,h,f\rangle/([h,e]=2e,\ [h,f]=-2f,\ [e,f]=h)$

Пусть $q\in\mathbb{C}\setminus\{0,\pm1\}$. Положим $U_q(\mathfrak{sl}_2)=\mathbb{C}\langle E,K^{\pm1},F\rangle/$ $(KK^{-1}=K^{-1}K=1,\ KEK^{-1}=q^2E,\ KFK^{-1}=q^{-2}F,\ [E,F]=\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}})$.
В дальнейшем будем часто писать U вместо $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

Отметим, что имеет место аналог теоремы PBW: элементы $F^{n_1}K^{n_2}E^{n_3}$ с $n_1,n_3\geq 0$ образуют базис в U.

1.2) <u>Структура алгебры Хопфа.</u> Зададим Δ на образующих так: $\Delta(E)=E\otimes 1+K\otimes E$, $\Delta(F)=F\otimes K^{-1}+1\otimes F$, $\Delta(K^{\pm1})=K^{\pm1}\otimes K^{\pm1}$. Тогда Δ единственным образом продолжается до гомоморфизма $U\to U\otimes U$ ассоциативных алгебр (существование следует из того, что $\Delta(E),\Delta(F)$, $\Delta(K)\in U\otimes U$ удовлетворяют соотношениям для E,F,K – упр.). Коумножение Δ коассоциативно, но не кокоммутативно (упр.). Коединица определяется посредством: $\varepsilon(E)=\varepsilon(F)=0$, $\varepsilon(K)=1$, а антипод: $S(E)=-K^{-1}E$, $S(F)=-FK$, $S(K)=K^{-1}$. Проверка аксиом – упр.

1.3 Предел при $q\to1$. При $q\to1$ алгебра $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ "стремится" к $U(\mathfrak{sl}_2)$. Этому можно придать очень формальный смысл (с помощью формальных деформаций), но мы только проделаем основное вычисление. А именно, пусть $K\to1$ при $q\to1$. Рассмотрим $H:=\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}$, так что $[E,F]=H$ и нам надо проверить, что $[H,E]\xrightarrow[q\to1]{}2E$ (для F аналогично).

$$[H,E]=\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}E-E\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}=\frac{q^2-1}{q-q^{-1}}EK-\frac{q^{-2}-1}{q-q^{-1}}EK^{-1}=qEK+q^{-1}EK^{-1}\longrightarrow 2E.$$

2) Представления $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Мы предположим, что q не является корнем из 1. Можем рассмотреть весовое разложение отн. K. А именно для U-модуля V положим $V_\alpha := \{v \in V \mid (K-\alpha)^N v = 0, N \gg 0\}$. Тогда $EV_\alpha \subset V_{q^2\alpha}$, $FV_\alpha \subset V_{q^{-2}\alpha}$. В частности, наше условие на q дает, что E, F действуют нильпотентными операторами.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением представлений, где K действует диагонализуемо с собственными значениями q^n, $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что из равенства $\Delta(K) = K \otimes K$ множество таких представлений замкнуто относительно тензорных произведений. Пример такого представления $\mathbb{C}^2$ с E, F, K действующими матрицами $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$. Пример представления не из нашего класса: $\mathbb{C}$, где E, F действуют 0, а K посредством -1.

Замечание: На самом деле, по модулю существования двух одномерных представлений, одного "хорошего" - где K действует единицей, и одного "плохого", теория представлений $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ (q не корень из единицы) устроена так же как и теория представлений $\mathfrak{sl}_2$ - более или менее с теми же доказательствами. А именно, в каждой размерности существуют (один два) неприводимых модуля, и каждый модуль вполне приводим. Ровно половина модулей удовлетворяет нашим условиям, а оставшаяся половина получается из первой умножением на тот "плохой" одномерный модуль.

Если же q - корень из 1, то теория представлений $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ выглядит примерно также, как и теория представлений $\mathfrak{sl}_2$ в положительной характеристике.

3.1) <u>Обсуждение</u>. Как уже говорилось выше, $\Delta \neq \Delta^{op}$, где $\Delta^{op} := \sigma \circ \Delta$. Действительно, $\Delta(K) = \Delta^{op}(K) = K \otimes K$ но

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E, \quad \Delta^{op}(E) = E \otimes K + 1 \otimes E$$

$$\Delta(F) = F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F, \quad \Delta^{op}(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F$$

Одним из следствий является то, что для U-модулей V_1, V_2 естественный изоморфизм $\sigma: V_1\otimes V_2 \to V_2\otimes V_1$ не является изоморфизмом. Это однако не означает, что изоморфизма нет. Несложно показать, что оба модуля изоморфны, но хотелось бы выписать изоморфизм не зависящий от V_1 и V_2. Идеальная ситуация — изоморфизм задается в виде $R_{V_2\otimes V_1}\circ\sigma$ для обратимого элемента $R\in U\otimes U$. Условие того, что $R_{V_2\otimes V_1}\circ\sigma$ (автоматически биективное отображение) является гомоморфизмом U-модулей $V_1\otimes V_2 \to V_2\otimes V_1$:

$$\underbrace{R_{V_2\otimes V_1}\circ\sigma\circ\Delta(u)_{V_1\otimes V_2}}_{\parallel}(v_1\otimes v_2) = \underbrace{\Delta(u)_{V_2\otimes V_1}\circ R_{V_2\otimes V_1}}_{\parallel}\circ\sigma(v_1\otimes v_2)$$

$$R_{V_2\otimes V_1}\circ\Delta^{op}(u)_{V_2\otimes V_1}(v_2\otimes v_1) \qquad \Delta(u)_{V_2\otimes V_1}\circ R_{V_2\otimes V_1}$$

будет выполнено, если $R\cdot\Delta^{op}(u) = \Delta(u)R$ (равенство в $U\otimes U$, $\forall u\in U$).

Однако такого R нет. Причина — слишком малое число обратимых элементов в $U\otimes U$. Однако, R можно найти, если рассматривать некоторое "пополнение" — вместо конечных сумм элементов PBW базиса допускать некоторые бесконечные суммы (аналогия: обратимые многочлены — только константы, а обратимые формальные ряды — все с ненулевым свободным членом). Мы построим R как произведение $\Theta\Psi$ где $\Theta^{-1}\Delta(u)\Theta=\Delta'(u)$ и $\Psi^{-1}\Delta'(u)\Psi=\Delta^{op}(u)$ $\forall u\in U$.

Здесь Δ' — ещё одно копроизведение

$$\Delta'(K)=K\otimes K,\quad \Delta'(E)=E\otimes 1+K^{-1}\otimes E,\quad \Delta'(F)=F\otimes K+1\otimes F$$

см. замечание ниже по поводу его происхождения.

Получившийся элемент R — универсальная R-матрица.

3.2) Θ. Напомним, что E, F действуют нильпотентно на любом U-модуле. Поэтому сумма $\Theta=\sum_{n=0}^{\infty} a_n F^n\otimes E^n$ конечна на любом модуле $V_1\otimes V_2$. Более того, оператор $F\otimes E$ тоже нильпотентный, а потому Θ обратимо если $a_0\neq 0$, скажем $a_0=1$. Мы хотим искать Θ с $\Theta\Delta'(u)=\Delta(u)\Theta$ (1) в таком виде. Достаточно проверить (1) на образующих, что даст коэффициенты a_n.

Для $u=K$ (1) выполнено автоматически. Равенство для $u=E$ переписывается

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n F^n \otimes E^n (E\otimes 1 + K^{-1}\otimes E) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (E\otimes 1 + K\otimes E)(F^n\otimes E^n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (F^n K^{-1} - K F^n)\otimes E^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n [E, F^n]\otimes E^n \Leftrightarrow \Big| \, a_n(F^n K^{-1} - K F^n) = = a_{n+1}[E, F^{n+1}], \; n\geq 0$$

Таким образом нам надо вычислить $[E, F^n]$. Через $[n]$ обозначим квантовое целое $[n] := q^{n-1} + q^{n-3} + \ldots + q^{1-n}$. Несложная индукция показывает, что $[E, F^n] = [n] F^{n-1} \frac{K q^{1-n} - K^{-1} q^{n-1}}{q - q^{-1}}$. Т.о. наше равенство становится $a_n(F^n K^{-1} - K F^n) = a_{n+1} [n+1] F^n \frac{K q^{-n} - K^{-1} q^n}{q-q^{-1}} \Leftrightarrow a_n (F^n K^{-1} - q^{-2n} F^n K)$
$= a_{n+1}[n+1] \frac{K q^{-n} - K^{-1} q^n}{q - q^{-1}} \Leftrightarrow (q - q^{-1}) a_n = [n+1] a_{n+1} q^n \Leftrightarrow a_{n+1} = - \frac{(q-q^{-1}) q^{-n} a_n}{[n+1]}$.

Т.о. $\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F^n \otimes E^n$, где $a_n = (-1)^n q^{-n(n-1)/2} \frac{(q-q^{-1})^n}{[n]!}$ ← квантовый факториал

К примеру, вычислим Θ на $V\otimes V'$, где $V = V' = \mathbb{C}^2$. Операторы $F^n \otimes E^n$ равны 0 для $n\geq 2$. Выберем базисы e_1, e_2, e_1', e_2' так что $Fe_1 = e_2$, $Ee_2 = e_1$ и аналогично для e_1', e_2'. В базисе $e_1\otimes e_1'$, $e_1\otimes e_2'$, $e_2\otimes e_1'$, $e_2\otimes e_2'$ Θ записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1}-q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3) Вычисление Ψ. Оператор $\Psi: V_1\otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2$ будет иметь вид $\Psi(v_\lambda \otimes v_\mu) = \psi(\lambda,\mu) v_\lambda \otimes v_\mu$, где v_λ, v_μ - собственные векторы для K с собственными значениями q^λ, q^μ, а $\psi: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$ отображение которое мы определим из уравнения $\Psi \Delta^{op}(u) = \Delta'(u)\Psi$. Опять же для $u=K$ уравнение верно автоматически. Для $u=E$ имеем (и для F то же самое): $\Psi(E\otimes K + 1\otimes E)(v_\lambda\otimes v_\mu) = (E\otimes 1 + K^{-1}\otimes E)\Psi(v_\lambda\otimes v_\mu)$

$$\Psi(Ev_\lambda \otimes q^\mu v_\mu + v_\lambda \otimes E v_\mu) \qquad \psi(\lambda,\mu)(Ev_\lambda\otimes v_\mu + q^{-\lambda} v_\lambda \otimes E v_\mu)$$

$$\psi(\lambda+2,\mu) \underbrace{q^\mu}_{Ev_\lambda\otimes v_\mu} + \psi(\lambda,\mu+2) \, v_\lambda \otimes E v_\mu$$

12

Т.о. равенство эквивалентно: $\psi(\lambda+2,\mu)q^{\mu} = \psi(\lambda,\mu) = \psi(\lambda,\mu+2)\, q^{\lambda}$

Это определяет ψ однозначно, если знать $\psi(\lambda,\mu)$ для $\lambda,\mu \in \{0,1\}$.

Любой выбор (ненулевых) значений дает ψ для которого Ψ удовлетворяет нужному уравнению, и, стало быть, универсальную R-матрицу $R = \Theta\Psi$.

Рассмотрим тот же пример, что и выше. Веса нечетные (±1) поэтому достаточно задать $\psi(1,1)$. Положим $\psi(1,1) := q^{-1} \Rightarrow \psi(-1,-1) = q^{-1}$; $\psi(1,-1) = \psi(-1,1) = 1$

Тогда в том же базисе, что и выше $R = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1}-q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$ и

$$R \circ \sigma = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-1}-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

Замеч: 1) Коумножение Δ' возникает так. У алгебры U есть антиавтоморфизм (=изоморфизм $U \to U^{op}$) τ с $\tau(E)=E$, $\tau(F)=F$, $\tau(K)=K$ с $\tau^2=1$. Тогда $\Delta' = (\tau\otimes\tau)\circ\Delta\circ\tau$.

2) Квантовая группа $U_q(\mathfrak{g})$ существует для любой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (к полупростым алгебрам является, скажем, $\mathfrak{sl}_n$). Универсальная R-матрица (построенная Дринфельдом) тоже существует в этом общем случае.