Лекция 3. Группа кос.

1) Косы и квантовые группы.

2) Косы и узлы.

Пока мы не видели никакой связи между узлами и квантовыми группами. Эта связь работает через группы кос, которые мы сегодня введем.

1.1) <u>Уравнение Янга-Бакстера.</u> В прошлый раз мы ввели квантовую группу $U = U_q(\mathfrak{sl}_2)$ и универсальную R-матрицу R, живущую в подходящим образом взятом пополнении произведения $U\otimes U$, так что для U-модулей V_1, V_2 имеем отображение $R_{V_1\otimes V_2}: V_1\otimes V_2 \to V_2\otimes V_1$. Положим также $\Sigma_{V_1,V_2} := R_{V_2\otimes V_1}\circ\sigma : V_1\otimes V_2 \to V_2\otimes V_1$. Например, для $V_1 = V_2 = \mathbb{C}^2$ имеем

$$\Sigma_{V_1,V_2} = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-1}-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

Возьмем теперь три модуля V_1, V_2, V_3. Можем записать 2 изоморфизма $V_1\otimes V_2\otimes V_3 \to V_3\otimes V_2\otimes V_1$ перестановками соседних:

$$\begin{tikzcd}
 & V_2\otimes V_1\otimes V_3 \arrow[r, "\Sigma_{23}"] & V_2\otimes V_3\otimes V_1 \arrow[dr, "\Sigma_{12}"] & \\
V_1\otimes V_2\otimes V_3 \arrow[ur, "\Sigma_{12}"] \arrow[dr, "\Sigma_{23}"'] & & & V_3\otimes V_2\otimes V_1 \\
 & V_1\otimes V_3\otimes V_2 \arrow[r, "\Sigma_{12}"] & V_3\otimes V_1\otimes V_2 \arrow[ur, "\Sigma_{23}"'] &
\end{tikzcd}$$

Здесь Σ_{ij} обозначает изоморфизм перестановки сомножителей на местах ij (осуществляемый с помощью $R\circ\sigma$). Отметим, что эти два изоморфизма соответствуют двум способам записать транспозицию (13) в виде произведения трех транспозиций соседних.

Теорема: изоморфизмы совпадают: $\Sigma_{12}\Sigma_{23}\Sigma_{13} = \Sigma_{23}\Sigma_{12}\Sigma_{23}$.

Доказательство – умное вычисление, которое мы проводить не будем. Нам будет нужен случай $V_1 = V_2 = V_3 = \mathbb{C}^2$. Это несколько менее умное вычисление, которое мы оставим в качестве упражнения.

Замечание: Равенство в теореме можно переписать в терминах R. Получаем (квантовое) уравнение Янга-Бакстера (QYBE): $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$.

Оно появляется в стат. физике и было исходной мотивацией для введения квантовых групп.

1.2) Группа кос и её представление через R-матрицу. Пусть теперь $V_1=V_2=\dots=V_n=V$ – $\mathcal{U}$-модули. Имеем операторы $\Sigma_{12}, \Sigma_{23}, \dots \Sigma_{n-1,n}$ удовлетворяющие соотношениям:

(1) $\Sigma_{i,i+1}\Sigma_{i+1,i+2}\Sigma_{i,i+1} = \Sigma_{i+1,i+2}\Sigma_{i+1,i+2}\Sigma_{i+1,i+2}$

(2) $\Sigma_{i,i+1}\Sigma_{j,j+1} = \Sigma_{j,j+1}\Sigma_{i,i+1}$ $\quad |i-j|>1$

Группа кос – это группа с образующими $T_1,\dots T_{n-1}$ и соотн. (1), (2) в к-ых вместо $\Sigma_{i,i+1}$ надо поставить T_i, $i=1,\dots,n-1$. Т.о. $V^{\otimes n}$ становится представлением группы кос.

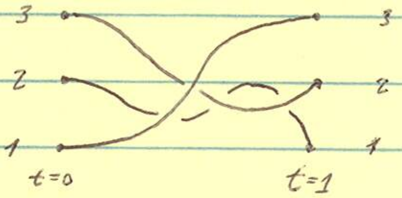
в $\mathbb{R}^2\times[0,1]$

2.1) Косы, топологически. По определению, коса на n нитях – это набор n нитей, соединяющих n точек, скажем $(i,0,0)$, $i=\overline{1,n}$ с n точками $(i,0,1)$, $i=\overline{1,n}$ (в произвольном порядке), удовлетворяющих следующим условиям:

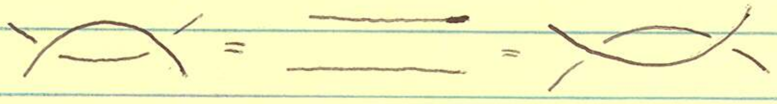
(i) все нити проектируются однозначно на $[0,1]$ (и т.о. не "заузливаются")

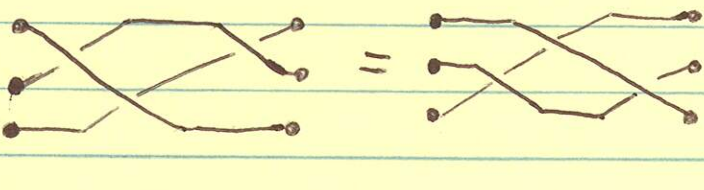
(ii) нити не пересекаются.

Косы рассматриваются с точностью до изотопии. Как и узлы, косы можно представлять планарными диаграммами (проектируя их на плоскость). Например:



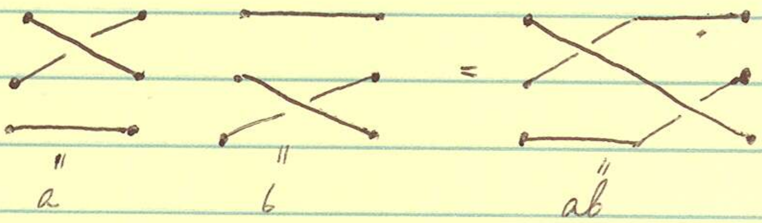
Разные диаграммы соответствуют одинаковым (= изотопным) косам, если они получаются друг из друга планарными изотопиями (т.е. существует непрерывно меняющееся семейство диаграмм, соединяющее две диаграммы) и двумя движениями Рейдемейстера:

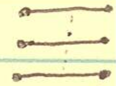
(R2) 

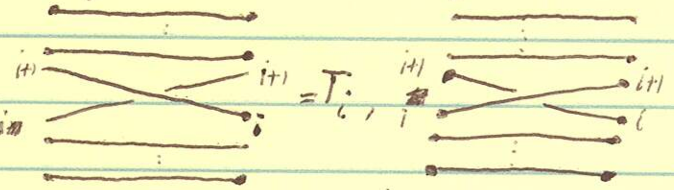
(R3) 

]

2.2) Умножение. Обозначим мн-во кос на n нитях через B_n. На B_n есть естественное умножение — конкатенция. Например,



Это умножение ассоциативно и обладает единицей — тривиальной косой 
Более того, любой элемент обратим. А именно, образующими моноида B_n являются косы вида:



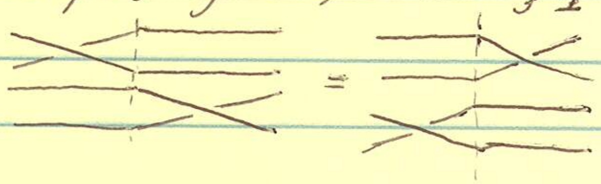
(R2) означает в точности, что T_i и T_i^{-1} обратны друг другу. Для того, чтобы видеть, что T_i, T_i^{-1} действительно образующие — надо порезать косу вертикально так, чтобы в каждой вертикальной полосе было только одно пересечение.

Теорема: соотношения между T_i, $i=1,..n-1$ — в точности соотношения (1), (2) из пункта 1.2:

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \qquad (1)$$

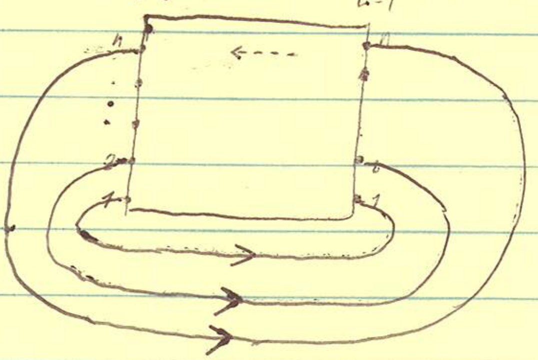
$$T_i T_j = T_j T_i, \ |i-j|>1 \qquad (2).$$

Набросок доказательства: Соотношение (1) — это в точности (R3). Соотношение (2) — это планарная изотопия, скажем $T_3 T_1 = T_1 T_3$ в B_4:

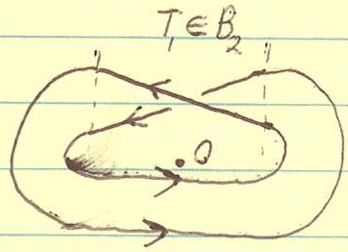


Утверждение о том, что эти соотношения влекут все остальные следует из утверждения о том, когда две диаграммы дают одну и ту же косу (напомним, что (R2) — это $T_i T_i^{-1} = T_i^{-1} T_i = 1$).

2.3) Замыкание косы. По косе можно построить ориентированное зацепление, используя процедуру замыкания:

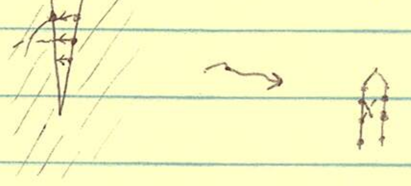


Например: $T_1 \in B_2$

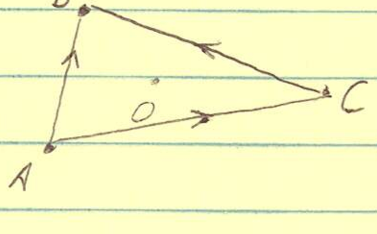


Теорема (Александер) Всякое зацепление получается замыканием косы.

Д-во: мы говорим, что зацепление (диаграмма) закручено вокруг точки O, если каждый луч из O пересекает ~~...~~ диаграмму трансверсально и в любом достаточно малом угле все дуги идут против часовой стрелки. Если такая точка найдется, то, выбирая угол, в котором нет пересечений. Часть диаграммы вне угла естественным образом является диаграммой косы:



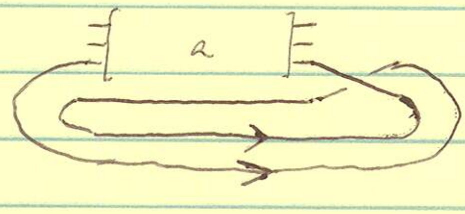
Если же точки нет, то можно выбрать её произвольным образом и перестроить диаграмму, используя следующее простое планиметрическое наблюдение:



А именно, можем считать, что диаграмма кусочно линейна, причем разбиение на отрезки таково, что на каждом содержится ≤ 1 точки пересечения. Возьмем неправильно ориентированный отрезок $\overline{AB}$. Если на нем нет точек пересечения, или пересекающий отрезок лежит под ним, то возьмем соответствующую нить, потянем её вверх, а потом уложим на диаграмму, образовав два новых, но уже правильно ориентированных отрезка. В противном случае сделаем то же, но потянув нить вниз. На каждом ходу количество неправильно ориентированных отрезков уменьшается на 1 □

Какие косы имеют одинаковые замыкания? На это отвечает:

2.4) <u>Теорема Маркова</u>. Разные косы могут давать одинаковые зацепления, скажем $1\in B_1$ и $T_1\in B_2$ оба дают тривиальный узел (также как $T_1^{-1}\in B_2$). Более общо, для $a\in B_{n-1}$, замыкания a и $aT_{n-1}^{\pm 1}\in B_n$ совпадают:



С другой стороны для $a,b\in B_n$ произведения ab и ba имеют одинаковое замыкание. А именно, замыкание ab можно интерпретировать так: пишем ab на листе бумаги, а потом сворачиваем его в цилиндр и получаем диаграмму замыкания ab на цилиндре. Но цилиндр для ba получается из цилиндра для ab поворотом на 180°.

Иными словами, замыкания сопряженных кос совпадают. Т.о. имеем два вида преобразований, сохраняющих замыкание (преобразования Маркова):

(M1) $a\in B_n \longleftrightarrow bab^{-1}\in B_n$ $(\forall b\in B_n)$

(M2) $a\in B_{n-1} \longleftrightarrow aT_{n-1}^{\pm 1}\in B_n$ (где мы вкладываем B_{n-1} в B_n естественным образом).

Теорема (Марков) Замыкания двух кос совпадают тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга некоторым количеством преобразований (M1) и (M2).

Замечание: есть ещё одна реализация группы B_n — как фундаментальной группы пространства неупорядоченных наборов n-ок различных комплексных чисел.