Лекция 4.
Полином Джонса.

1) Полином Джонса
2) ~~Замечания~~ Дополнения

1.0) Summary. Мы ввели группу кос B_n – группу с образующими $T_1, \dots T_{n-1}$ и соотношениями (1) $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$

(2) $T_i T_j = T_j T_i \quad |i-j|>1$.

Теорема Маркова говорит, что набор отображений $P_n : B_n \to \mathbb{C}$ $(n=1,2,\dots)$ задает инвариант узлов, если

(a) $P_n(ab) = P_n(ba) \quad \forall a,b \in B_n$

(b) $P_n(a) = P_{n+1}(a T_n^{\pm 1})$, $\forall a \in B_n (\subset B_{n+1})$.

Кроме того, стартуя с квантовой группы $U = U_q(\mathfrak{sl}_2)$, мы построили представление ρ_n группы B_n в $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$, в котором образующая T_i действует посредством $1_{\mathbb{C}^2}^{\otimes(i-1)} \otimes T \otimes 1_{\mathbb{C}^2}^{\otimes(n-i-1)}$, где

$$T = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-1}-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

– матрица в базисе $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$ (e.g. $T(e_1 \otimes e_2) = e_2 \otimes e_1 + (q^{-1}-q) e_1 \otimes e_2$).

Цель этой лекции – из представлений ρ_n изготовить отображения P_n, удовлетворяющие (a), (b).

Наиболее естественные отображения, которые можно произвести из ρ_n – это следы $\operatorname{tr} \rho_n =: P_n$. Они автоматически удовлетворяют (a). Посмотрим, что происходит с (b). Для блочного разложения, соответствующего

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n+1} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes n-1} \otimes e_1 \otimes e_1 \oplus (\mathbb{C}^2)^{\otimes n-1} \otimes e_1 \otimes e_2 \oplus (\mathbb{C}^2)^{\otimes n-1} \otimes e_2 \otimes e_1 \oplus (\mathbb{C}^2)^{\otimes n-1} \otimes e_2 \otimes e_2$$

Элемент ~~$a \in B_{n+1}$~~ $\rho_{n+1}(a)$ записывается матрицей вида

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

(где $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ – матрица $\rho_n(a)$).

14.

а элемент $\rho_{n+1}(T_n)$ - матрицей $\begin{pmatrix} q^{-1}E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & E & (q^{-1}-q)E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1}E \end{pmatrix}$

Перемножаем, и получаем $\rho_{n+1}(aT_n) = \begin{pmatrix} q^{-1}A_{11} & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & * & (q^{-1}-q)A_{11} & * \\ * & * & * & q^{-1}A_{22} \end{pmatrix}$ и стало быть

$P_{n+1}(aT_n) = (2q^{-1}-q)\,tr\,A_{11} + q^{-1}tr\,A_{22} \neq P_n(a)$. — ОБЛОМ.

1.1) <u>Модификация</u>. Это впрочем можно исправить. А именно, если вместо $\rho_{n+1}(a)$ использовать $\begin{pmatrix} qA_{11} & qA_{12} & 0 & 0 \\ qA_{21} & qA_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1}A_{11} & q^{-1}A_{12} \\ 0 & 0 & q^{-1}A_{21} & q^{-1}A_{22} \end{pmatrix}$, то

$$tr \cdot \rho_{n+1}(T_n) = tr(A_{11} + 0 + (q^{-2}-1)A_{11} + q^{-2}A_{22}) = q^{-2}tr(A_{11}+A_{22})$$
$$tr \cdot \rho_{n+1}(T_n)^{-1} = tr(q^2A_{11} + (q^2-1)A_{22} + 0 + A_{22}) = q^2\,tr(A_{11}+A_{22})$$

$$\rho_{n+1}(T_n)^{-1} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q-q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

Отметим, что переход от $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ к $\begin{pmatrix} qA_{11} & qA_{12} & 0 & 0 \\ qA_{21} & qA_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1}A_{11} & q^{-1}A_{12} \\ 0 & 0 & q^{-1}A_{21} & q^{-1}A_{22} \end{pmatrix}$

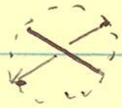
соответствует умножению слева на K в последнем множителе $\mathbb{C}^2$.

Впрочем, заменить $tr\,\rho_n(b)$ на $tr(1^{\otimes n-1}\otimes K \cdot \rho_n(b))$ будет неправильно — (a) нарушится. Одна из причин $1^{\otimes n-1}\otimes K$ не коммутирует с операторами $\rho_n(b)$ (а именно с $\rho_n(T_{n-1})$). А вот $K^{\otimes n}$ коммутирует. Это следует из того, что B_n действует на $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ эндоморфизмами U-модуля, а K действует ~~на~~ посредством $K^{\otimes n}$. Т.о. нам надо взять $P_n(b) := \lambda(b)\,tr(K^{\otimes n}\rho_n(b))$. Здесь $\lambda(b)$ - скаляр, который должен компенсировать множитель $q^{\mp 2}$ образующийся при на $T_n^{\pm 1}$:

$\lambda(b) = q^{-2}\lambda(bT_n) = q^2\lambda(bT_n^{-1})$. Для построения λ, отметим, что имеется гомоморфизм $\deg: B_n \to (\mathbb{Z},+)$, который на образующих равен $\deg T_i = 1$. Можем положить $\lambda(b) = q^{2\deg b}$. Окончательно,

$$P_n(b) := q^{2\deg b}\, tr(K^{\otimes n}\rho_n(b)).$$

1.2 Полином Джонса: это и есть инвариант зацеплений, который получается из P_n. А именно в некотором зацеплении L фиксируем пересечение в ⟨ ⟩. Можем иметь три варианта поведения зацепления в этом круге:

L_+ , L_-  L_0 

Для матрицы T имеем соотношение $T - T^{-1} = q^{-1}-q$. Если учесть степень и заменить T на $\tilde{T} = q^2 T$, то получим $q^{-2}\tilde{T} - q^2\tilde{T}^{-1} = (q^{-1}-q)\cdot 1$. Поэтому наш инвариант удовлетворяет (обосновать это — упражнение) $q^{-2}P(L_+) - q^2 P(L_-) = (q^{-1}-q)P(L_0)$. А это и есть определяющее соотношение полинома Джонса.

2.1) <u>Алгебра Гекке</u>. Мы уже отметили, что для образов эл-тов T_i при наших представлениях имеет место соотношения $T_i - T_i^{-1} = q^{-1}-q$ или, эквивалентно, $(T_i - q^{-1})(T_i+q)=0$. Фактор групповой алгебры $\mathbb{C}B_n$ по этим дополнительным соотношениям — это алгебра Гекке (а точнее, "конечная" алгебра Гекке типа A). При $q=1$, получаем $T_i^2=1$, и алгебра Гекке становится групповой алгеброй симметрической группы. Для любого q, размерность алгебры равна $n!$

Специализации алгебр Гекке при некоторых необычных значениях q появляются при изучении представлений GL_n над конечными полями (как алгебры эндоморфизмов некоторых индуцированных модулей)

14.

2.2) Другие квантовые группы.

Алгебру $U_q(\mathfrak{g})$ которая при $q \to 1$ "стремится" к $U(\mathfrak{g})$ можно образовать для любой простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (скажем $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ простая для любого n). Эта алгебра задается более сложными образующими и соотношениями и является куда более сложной чем $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Скажем, аналог PBW базиса существует, но его конструкция (Люстиг) весьма нетривиальна.

Универсальная R-матрица по-прежнему существует и удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера (Дринфельд). Скажем для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и тавтологического представления $V = \mathbb{C}^n$ имеем $R_{V,V} = q^{-1}\sum_{i=1}^{n} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{i \neq j} E_{ij} \otimes E_{ji} + (q^{-1} - q) \sum_{i<j} E_{ii} \otimes E_{jj}$. Такая R-матрица, по сути, дает инвариант узлов, который называется полином HOMFLY

2.3) Снова алгебра Гекке и двойственность Шура-Вейля

Элемент $T = R_{V,V} \circ \sigma$ в предыдущем примере снова удовлетворяет соотношению Гекке. Т.о. мы имеем представление алгебры Гекке в $V^{\otimes n}$, коммутирующее с представлением $U_q(\mathfrak{sl}_n)$. Это квантовый аналог классической (во всех смыслах) двойственности Шура-Вейля между представлениями полной линейной и симметрической группами.

2.4) <u>А для чего ещё нужны квантовые группы</u>?

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ слишком маленькая, чтобы от неё было много пользы. А более общие имеют много применений, среди которых мне бы хотелось выделить два теоретико-представленческих.

1) Канонические базисы в неприводимых конечномерных $\mathfrak{g}$-модулях — задача тривиальная для $\mathfrak{sl}_2$. Это базисы, к-е можно определить с помощью квантовой группы, к-е тяжело посчитать, но которые обладают замечательными свойствами, и большой теоретико представленческой важностью.

2) Имеется связь между представлениями подходящих версий кванто-

N ных групп в корнях из 1 и представлениями полупростых алгебраических групп (e.g. SL_n) в положительной характеристике. Формулы для характеров неприводимых конечномерных представлений в общем случае не известны, но для $p \gg n$ что-то можно сказать через квантовые группы.