ЛИСТОК 1. ВОКРУГ АЛГЕБР ХОПФА

1. Единственность коединицы

Докажите, что единица для данного коумножения единственна, если существует.

2. Конволюция

1) Пусть A, B – векторные пространства над $\mathbb{C}$, снабженные отображениями $A \to A \otimes A, B \otimes B \to B$. Определите произведение $*$ на $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B)$ (конволюцию).

2) Что является единицей для конволюции на $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, A)$, где A – биалгебра?

3) Докажите, что антипод S (если существует) является обратным к тождественному отображению $A \to A$. Выведите отсюда единственность антипода на данной биалгебре.

3. Аксиоматика антипода

Пусть A – биалгебра. Под антиподом на A будем понимать отображение $S : A \to A$ с $m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta$. Цель этой задачи – доказать, что антипод является антигомоморфизмом алгебр (и, на самом деле, коалгебр, но этим мы заниматься не будем).

Рассмотрим пространство $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A \otimes A, A)$. Снабдите его конволюцией. Что является единицей для этой конволюции? Рассмотрев отображения $M, N, P \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A \otimes A, A)$, заданные посредством $M(a \otimes b) = ab, N(a \otimes b) = S(b)S(a), P(a \otimes b) = S(ab)$, покажите, что $M * N = N * P$ совпадает с единицей. Выведите отсюда требуемое утверждение.

4. Групповые и примитивные элементы

1) Пусть $A = \mathbb{C}G$ – групповая алгебра. Докажите, что $G \subset \mathbb{C}G$ совпадает с множеством элементов $a \in A$, для которых $\Delta(a) = a \otimes a$ (групповые элементы).

2) Пусть $A = U(\mathfrak{g})$ – универсальная обертывающая алгебра. Докажите, что $\mathfrak{g} \in U(\mathfrak{g})$ совпадает с множеством элементов $a \in A$, для которых $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$ (примитивные элементы).