ЛИСТОК 2. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

1. Одно равенство в $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Для изучения конечномерных представлений алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ важно выразить элемент вида E^rF^s через базис PBW. Для этого нам потребуются некоторые обозначения. Для натурального числа n, через $[n]$ мы будем обозначать квантовое целое $q^{n-1}+q^{n-3}+\ldots+q^{1-n}$. Соответственно, можем определить квантовый факториал $[n]!$. Далее, целого числа n положим $[K;n]=\frac{Kq^n-K^{-1}q^{-n}}{q-q^{-1}}$. Напомним, что $[K;0]$ – это квантовый аналог элемента h. Более общо, $[K;n]$ – квантовый аналог $h+n$.

Докажите следующую формулу

$$E^rF^s=\sum_{i=0}^{\min(r,s)}\frac{[r]![s]!}{[r-i]![s-i]![i]!}F^{s-i}\left(\prod_{j=1}^{i}[K;i+j-(r+s)]\right)E^{r-i}.$$

2. Элемент Казимира

Докажите, что элемент $C:=FE+\frac{Kq+K^{-1}q^{-1}}{(q-q^{-1})^2}\in U_q(\mathfrak{sl}_2)$ является центральным, т.е., коммутирует с любым другим элементом.

3. Классификация представлений

Мы используем предыдущую задачу для получения полной классификации конечномерных представлений $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ в случае, когда q не является корнем из 1. Эта классификация, практически, повторяет классификацию для $\mathfrak{sl}_2$, которую надо проделать перед тем, как решать эту задачу, см. скажем, http://www-math.mit.edu/~etingof/replect.pdf, Problem 1.55.

1) Воспользуйтесь задачей 1, чтобы доказать, что на неприводимом конечномерном представлении K действует диагонализуемо с собственными значениями вида $\pm q^n$.

2) Для конечномерного представления M, рассмотрим сумму M_+ (соотв. M_-) обобщенных собственных пространств, отвечающих собственным значениям вида q^n (соотв. $-q^n$). Проверьте, что M_+ и M_- являются подпредставлениями.

3) Повторив (с необходимыми модификациями) аргумент для $\mathfrak{sl}_2$ докажите, что для каждого числа $\pm q^n$ ($n\geqslant 0$) существует единственное неприводимое представление $L(n,\pm)$ со старшим весом $\pm q^n$, что эти представления попарно неизоморфны, и что они исчерпывают конечномерные неприводимые представления. Более того, докажите, что всякое представление алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ вполне приводимо.

4. Случай корня из единицы*

Пусть теперь q – ℓ-ый корень из 1 (будем считать, что ℓ – нечетное число). Попытайтесь классифицировать все (конечномерные) неприводимые представления. Указание: чем больше центральных элементов в $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ вы найдете, тем лучше. Покажите на примере, что полная приводимость не выполняется. Наконец, докажите, что все неприводимые представления конечномерны.