ЛИСТОК 3. ЧТОБЫ НИКОМУ МАЛО НЕ ПОКАЗАЛОСЬ

Если кому-то покажется мало, сообщите об этом на i.loseu@neu.edu. Впрочем, и по другим поводам тоже можно писать.

1. Алгебра $U_q(\mathfrak{sl}_n)$

1.1. **Задание образующими и соотношениями.** Алгебра $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ порождена образующими $K_i^{\pm 1}, E_i, F_i$ с $K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1$ и следующими соотношениями (где $a_{ii} = 2, a_{ij} = -1$ для $|i-j| = 1$ и $a_{ij} = 0$, это соответствующая матрица Картана):

$$\begin{aligned}
&K_iK_j = K_jK_i,\\
&K_iE_jK_i^{-1} = q^{a_{ij}}E_j,\\
&K_iF_jK_i^{-1} = q^{-a_{ij}}F_j,\\
&E_iF_j = F_jE_i, i \neq j,\\
&E_iF_i - F_iE_i = \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}},\\
&E_iE_j = E_jE_i, F_iF_j = F_jF_i, \text{ для } |i-j| > 1,\\
&E_i^2E_j - [2]E_iE_jE_i + E_jE_i^2 = 0, \text{ для } |i-j| = 1,\\
&F_i^2F_j - [2]F_iF_jF_i + F_jF_i^2 = 0, \text{ для } |i-j| = 1.
\end{aligned}$$

Последние три строчки – это “квантовые соотношения Серра”.

Эта алгебра по прежнему имеет “правильные размер”, но выписать явно базис PBW – это нетривиальная задача, решенная Люстигом.

1.2. **Представление.** Докажите, что алгебра $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ представляется в пространстве $\mathbb{C}^n$ следующим образом, где через E_{ij} обозначена матричная единица (матрица с одной единицей в указанной позиции и нулями на всех прочих позициях):

$$E_i \mapsto E_{ii+1}, F_i \mapsto E_{i+1i}, K_i \mapsto qE_{ii} + q^{-1}E_{i+1i+1}$$

1.3. **Копроизведение.** Докажите, что сопоставление $\Delta(E_i) = K_i \otimes E_i + E_i \otimes 1, \Delta(F_i) = 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_i^{-1}, \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i$ продолжается до гомоморфизма алгебр $U_q(\mathfrak{sl}_n) \to U_q(\mathfrak{sl}_n) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_n)$. Проверьте, что это коумножение коассоциативно.

1.4. R**-матрица***. Можно написать универсальную R-матрицу для $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ и она будет удовлетворять QYBE. Этого задача делать не просит. Тем не менее докажите, что, для

$$R := q^{-1}\sum_{i=1}^{n} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{i \neq j} E_{ii} \otimes E_{jj} + (q^{-1} - q)\sum_{i<j} E_{ij} \otimes E_{ji} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$$

отображение $R \circ \sigma$ является $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-линейным, и что R удовлетворяет QYBE.

1.5. **Полином HOMFLY***. Оказывается, что трюком аналогичным тому, что был использован для полинома Джонса (конечно, K нужно заменить на некоторый элемент из $U_q(\mathfrak{sl}_n)$) можно получить инвариант узлов. Докажите это. Полученный инвариант эквивалентен полиному HOMFLY, обобщению полинома Джонса.

2. Больше инвариантов из $U_q(\mathfrak{sl}_2)$?*

Вместо $\mathbb{C}^2$ мы можем взять и другие неприводимые представления $U_q(\mathfrak{sl}_n)$, на которых K действует с собственными значениями вида q^n (при переходе к $-q^n$ разницы не будет). Мне неизвестно, можно ли из них получить инварианты узлов, литература не высказывается определенно по этому поводу. Поэтому я предлагаю вам ответить на этот вопрос, например, для $\mathbb{C}^3$.

3. Алгебра Гекке

В этой задаче над некоторыми пунктами должны стоять $*$, но мне лень их ставить.

3.1. **Определение.** Алгебра Гекке $H_q(n)$ – это фактор групповой алгебры $\mathbb{C}B_n$ по соотношениям $(T_i - q^{-1})(T_i + q) = 0$ (где, напомним, $T_1, \dots, T_{n-1}$ – стандартные образующие B_n).

3.2. **Квантовая двойственность Шура-Вейля.** Таким образом, представление B_n в $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ пропускается через $H_q(n)$. Покажите, что представление B_n в $(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$, см. задачу 1.4. также пропускается через $H_q(n)$. Стало быть, на $(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$ имеем коммутирующие представления $U_q(\mathfrak{sl}_m)$ и $H_q(n)$. Это квантовый аналог классической (во всех смыслах) двойственности Шура-Вейля.

3.3. **Алгебра Гекке и GL над конечным полем.** Алгебра Гекке возникает в совершенно классической математике, при изучении представлений группы $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_v)$, где $\mathbb{F}_v$ – поле из v элементов (неудачное обознчение, но q уже занято; обычно обозначают наоборот). Представления все еще берутся над $\mathbb{C}$. Серия задач ниже объясняет как.

1) Вложим S_n в G как подгруппу мономиальных матриц. Обозначим через $B \subset G$ подгруппу верхнетреугольных матриц. Докажите разложение Брюа: $G = \bigsqcup_{w \in S_n} BwB$.

2) Группа $B \times B$ действует на G двусторонними сдвигами. Рассмотрим подпространство $H := \mathbb{C}[G]^{B \times B}$ двусторонне инвариантных функций. Докажите, что характеристические функции t_w классов BwB образуют базис в H.

3) На H можно ввести структуру алгебры относительно операции называемой *конволюцией.* А именно, для того, чтобы определить $f_1 * f_2$ нам надо объяснить как вычислять эту функцию в точке g. Мы полагаем $f_1 * f_2(g) = \frac{1}{|B|}\sum_{h \in G} f_1(gh^{-1}) f_2(h)$. Докажите, что H становится ассоциативной алгеброй с единицей t_e.

4) Для элемента $w \in S_n$ можно определить его *длину* $\ell(w)$ как минимальное количество простых отражений (=транспозиций соседних), необходимых для записи w; это число совпадает с количеством инверсий в w. Докажите, что $t_u t_w = t_{uw}$, если $\ell(u) + \ell(w) = \ell(uw)$.

5) Докажите, что, для простого отражения s, мы имеем $t_s^2 = (v-1)t_s + v t_e$.

6) Выведите существование гомоморфизма $H_q(n) \to H$ для $q = v^{-1/2}$.

7) Отождествите H с алгеброй эндоморфизмов G-модуля $\mathrm{Ind}_B^G(\mathrm{triv})$.

3.4. **Структура $H_q(n)$.** Положим $s_i = (i\,i+1)$ и будем писать $T_{s_i} := T_i$. Для $w \in S_n$ положим $T_w := T_{s_{i_1}} \dots T_{s_{i_{\ell(w)}}}$, где $w = s_{i_1} \dots s_{i_{\ell(w)}}$ – приведенное разложение элемента w, т.е. представление минимальной длины.

1) Известный факт (попробуйте его доказать) состоит в том, что любые два преведенных разложения получаются друг из друга с помощью “braid moves”, т.е., замен $s_i s_{i+1} s_i$ на $s_{i+1} s_i s_{i+1}$ и обратно. Пользуясь этим покажите, что T_w корректно определен.

2) Покажите, что элементы T_w порождают $H_q(n)$ как векторное пространство.

3) Воспользуйтесь гомоморфизмами из 3.3.6 и покажите, что T_w образуют базис в $H_q(n)$.

4) Для информации: если q отлично от нетривиального корня из 1, то $H_q(n)$ полупростая алгебра, изоморфная $\mathbb{C}S_n$. Дело в том, что теории представлений $\mathbb{C}S_n$ и $H_q(n)$ можно строить параллельно (если пользоваться, скажем, не стандартным подходом к первым, а тем, который можно найти в статье Вершика и Окунькова, приведенной в качестве аппендикса к книжке Фултона про диаграммы Юнга), и просто будет видно, что они одинаковы, если q – не корень из 1. Это дает классификацию неприводимых подпредставлений в $\mathrm{Ind}_B^G(\mathrm{triv})$, т.е., неприводимых представлений группы G, обладающих B-инвариантным вектором.