

Вводные задачи к курсу Г.Б.Шабата
Введение в адельную демократию

0.1. Может ли локально компактная связная группа не быть линейно связной?

0.2. Рассмотрите на плоскости с координатами (x, y) три функции:

$$\|(x, y)\|_1 := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \|(x, y)\|_2 := \max(|x|, |y|), \quad \|(x, y)\|_3 := |x| + |y|.$$

Проверьте, что все они являются *нормами*. Нарисуйте соответствующие шары. Совпадают ли *топологии*, определяемые этими нормами?

0.3. Приведите примеры разных топологий на одном и том же вещественном векторном пространстве. Подсказка. На *конечномерном* векторном пространстве над локально компактным неметризуемым полем топология единственна.

0.4. Пусть a и b – взаимно простые натуральные числа. Установите изоморфизм конечных колец

$$\frac{\mathbb{Z}}{a\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{b\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{ab\mathbb{Z}}.$$

Задайте его эффективно при $a = 8, b = 125$. Можно ли опустить условие взаимной простоты?

0.5. Какие известные вам *элементарные* функции разлагаются в *гипергеометрические* ряды

$$1 + \frac{ab}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots?$$

0.6. Введя *формальный* степенной ряд

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

придайте точный смысл тождеству $\exp(x+y) \equiv \exp(x)\exp(y)$ и докажите его.