

**Задачи к лекции 1**  
**курса Г.Б.Шабата**  
*Введение в адельную демократию*

**1.1.** Докажите, что в кольце  $\mathbb{Z}_{10}$  10-адических чисел  $\dots 999 = -1$ . Вычислите  $-2, -3, -99 \in \mathbb{Z}_{10}$ .

**1.2.** Какие целые числа обратимы в  $\mathbb{Z}_{10}$ ? Вычислите  $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7} \in \mathbb{Z}_{10}$ .

**1.3.** Вычислите  $\frac{1}{99}, \frac{1}{999}, \frac{1}{9999}, \dots \in \mathbb{Z}_{10}$ . Постройте теорию *периодических* 10-адических чисел.

**1.4.** Постройте теорию *квадратных уравнений* в кольце 10-адических чисел.

**1.5.** Постройте изоморфизм колец  $\mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ . Проверьте его непрерывность

**1.6.** Докажите, что кольцо  $\mathbb{Z}_2$  гомеоморфно *канторову совершенному множеству*. Каковы *связные* подмножества кольца  $\mathbb{Z}_2$ ?

**1.7.** При каких  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  функция  $\mathcal{N} : x \mapsto |x|^\lambda$  является нормой на  $\mathbb{R}$ ?

**1.8.** При каких простых  $p$  имеет смысл  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}_p$ ? Изучите применимость *метода Ньютона* к построению последовательных приближений решений уравнения  $x^2 = 2$  в  $\mathbb{Q}_p$ .

**1.9.** Докажите, что для любой последовательности  $p$ -адических чисел  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_p : n \mapsto a_n$  бесконечная сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n$$

существует тогда и только тогда, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**1.10.** Придайте смысл "числу"  $0! + 1! + 2! + 3! + \dots \in \mathbb{Q}_5$  и вычислите его приближённо в каком-либо указанном вами смысле. Поставьте вопрос об *иррациональности* этого числа и попытайтесь решить его.