Задачи к лекции 2
курса Г.Б.Шабата
Введение в адельную демократию

2.1. Проверьте аксиомы кольца для колец многочленов, формальных степенных рядов и формальных рядов Лорана.

2.2. Докажите, что для поля $\mathbb{F}$ поле частных кольца формальных степенных рядов $\mathbb{F}[[x]]$ изоморфно *кольцу* формальных рядов Лорана $\mathbb{F}((x))$, которое в силу этого результата оказывается *полем.*

2.3. Для любого поля $\mathbb{F}$ нулевой характеристики и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ установите равенство

$$(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} = (1+x)^{\alpha+\beta}$$

в кольце $\mathbb{F}[[x]]$.

2.4. Установите формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии над произвольным нормированным полем.

2.5. Изучите сходимось p-адических гипергеометрических рядов.

2.6. Докажите, что множество степенных рядов с коэффициентами из нормированного поля, сходящихся в некотором фиксированном круге, образует подкольцо кольца формальных степенных рядов.

2.7. Докажите, что для любого простого p ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ задаёт целую функцию на $\mathbb{Q}_p$.
2.8. Докажите, что любой сходящийся степенной ряд над любым $\mathbb{Q}_p$ задаёт непрерывную функцию на любом своём круге сходимости.
2.9. Докажите, что радиус сходимости степенного ряда экспоненты над любым $\mathbb{Q}_p$ равен $(\frac{1}{p})^{\frac{1}{p-1}}$.
2.10. Докажите, что радиус сходимости степенного ряда $\mathrm{logg} := -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(y-1)^n}{n}$ над любым $\mathbb{Q}_p$ равен 1.
2.11. Докажите, что p-адические логарифм и экспонента задают взаимно обратные изоморфизмы между мультипликативной группой диска радиуса $(\frac{1}{p})^{\frac{1}{p-1}}$ с центром в 1 и аддитивной группой того же радиуса с центром в 0.