Определители в комбинаторике

Задача 1. Рассмотрим множество точек (m, n) на плоскости, где m, n — целые числа, иными словами целочисленную решетку. Пусть ходить по решетке разрешается только или вверх, или вправо (то есть из точки (m, n) можно за один ход попасть или в точку $(m, n + 1)$ или в $(m + 1, n)$).

а) Проверьте, что количество способов пройти по таким правилам из точки $(0, 0)$ в точку (k, l) равно C^k_{k+l}.

Зафиксируем на нашей решетке n точек на оси ординат: $(0, x_1), \dots, (0, x_n)$ (причем $x_i < x_j$, если $i < j$) и n точек на прямой $x = T$ ($T \in \mathbb{N}$): $(T, y_1), \dots, (T, y_n)$ (опять же $y_i < y_j$, если $i < j$).

б) Рассмотрим на нашей решетке n путей $P_1, \dots, P_n$ таких, что P_i соединяет x_i и y_i. Сколько различных наборов путей существует? Тот же вопрос, если рассматриваются наборы путей $P_1, \dots, P_n$, где P_i соединяет x_i с каким-то y_j (необязательно с y_i), но при этом никакие два пути не приходят в одну и ту же точку y_s.

А что будет, если потребовать, чтобы пути в наборе не пересекались? Ясно, что в этом случае P_i обязательно соединяет x_i с y_i. Определим $n \times n$ матрицу R: положим $R_{i,j} = C^{y_i - x_j}_{T + y_i - x_j}$.

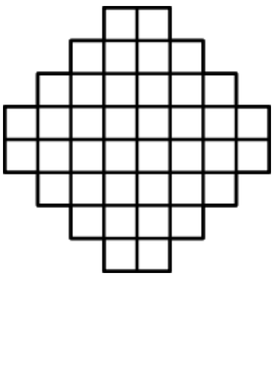
в) Докажите, что число различных наборов непересекающихся путей P_i, соединяющих точки x_i и y_i, равно $\det R$.

Задача 2 (формула Коши–Бине). Если A — матрица $m \times n$, B — матрица $n \times m$, то

$$\det(AB) = \sum_S \det A_S \det B_{S^T},$$

где сумма ведется по парам соответствующих миноров порядка m.

Задача 3. Сколькими способами можно разбить на доминошки а*) ацтекский бриллиант порядка n (на рис. ниже — диамант порядка 4); б*) прямоугольник $m \times n$. (Указание: найдите собственные значения матрицы смежности.)



Перечисление остовных деревьев

▷ Пусть Γ — ориентированный граф на n вершинах с ребрами $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m$.
Его *матрицей инцидентности* D называется $n \times m$ матрица, где

$$D_{i,j} = \begin{cases} -1, \text{ если } i - \text{"начало" ребра } \vec{e}_j; \\ \ \ 1, \text{ если } i - \text{"конец" ребра } \vec{e}_j; \\ \ \ 0, \text{ иначе }. \end{cases}$$

Матрицей Лаплпаса Q графа Γ (необязательно ориентированного) называется $n \times n$ матрица, где элемент

- $Q_{i,i}$ равен степени i-ой вершины,
- $Q_{i,j} = -1$, если i-ая и j-ая вершины соединены ребром $(i \neq j)$
- $Q_{i,j} = 1$, если i-ая и j-ая вершины не соединены ребром $(i \neq j)$

Остовными деревъями графа называются деревья, множество вершин которых совпадает с множеством вершин графа, а множество ребер есть подмножество множества ребер графа.

Задача 4.
а) Пусть в графе Γ вершин на одну больше, чем ребер. Выберем произвольную ориентацию ребер Γ. Обозначим символом $\bar{D}$ матрицу, полученную из матрицы инцидентности D графа Γ вычеркиванием первой строки. Тогда $\det \bar{D} \in \{-1, 0, 1\}$, причем $\det \bar{D} = \pm 1$ тогда и только тогда, когда Γ является деревом. Докажите!
б)Обозначим символом $\tilde{Q}$ матрицу, полученную из матрицы Лапласа Q графа Γ вычеркиванием первой строки и первого столбца. Докажите, что $Q = DD^T$ и $\tilde{Q} = \bar{D}\bar{D}^T$.

Задача 5 (Матричная теорема о деревьях). Для произвольного графа Γ число остовных деревьев графа равно $\det \tilde{Q}$.
(Указание: воспользуйтесь пунктом б), примените формулу Коши-Бине, а затем пункт а).)

Задача 6. Число всех (не различая изоморфные) деревьев с n пронумерованными вершинам есть n^{n-2}.
(Указание: примените матричную теорему к полному графу.)