

Определители и паросочетания

- ▷ Пусть Γ — двудольный граф с ориентированными ребрами. Его *ориентированной (двудольной) матрицей смежности* будем называть матрицу I , $I_{ij} = 1$, если из i -й черной вершины ведет ребро в j -ю белую, $I_{ij} = -1$, если ребро направлено в обратную сторону, $I_{ij} = 0$ иначе.
- ▷ Напомним, что *паросочетанием* в графе называется набор ребер без общих вершин; паросочетание называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины.

Задача 1. Пусть в двудольном графе поровну черных и белых вершин поровну, постройте биекцию между ненулевыми слагаемыми в $\det I$ и совершенными паросочетаниями в графе Γ .

- ▷ Знак этого слагаемого будем называть знаком совершенного паросочетания. (Заметим, что знаки паросочетаний зависят от выбора ориентаций ребер.)

Задача 2. Если двудольный граф Γ планарен, то его ребра можно ориентировать так, чтобы все паросочетания имели одинаковый знак. (И, таким образом, число совершенных паросочетаний в нем вычисляется определителем матрицы I .)

Задача 3. Пусть Γ — произвольный планарный граф с ориентированными ребрами. Тогда число совершенных паросочетаний в нем вычисляется пфаффианом его матрицы смежности.

Задача 4. Сколькими способами можно разбить на доминошки ацтекский диамант порядка n (на рис. ниже — диамант порядка 4)?

