Упражнения по курсу А.А.Глуцюка "Бильярды: периодические траектории и законы сохранения"

Задача 1.

а) Доказать, что софокусные эллипс и гипербола ортогональны в точках их пересечения: соответствующие касательные прямые ортогональны.

б) (для тех, кто знает, что такое комплексные числа) Доказать, что комплексификации двух софокусных эллипсов или гипербол (как комплексные кривые на двумерной комплексной плоскости) пересекаются и ортогональны в точках пересечения.

Задача 2. Эллиптические координаты.

Для заданных двух различных точек F_1 и F_2 на плоскости рассмотрим новые координаты (u, v) на плоскости с выколотым отрезком F_1F_2, в которых прямые, параллельные координатной оси u , суть эллипсы с фокусами F_1 и F_2, а прямые, параллельные координатной оси v - компоненты гипербол с теми же фокусами. Найти эти координаты (u, v).

Задача 3.

Пусть $l > 0$, и пусть эллипс с фокусами F_1 и F_2 задается как геометрическое место точек A, таких что

$$|AF_1| + |AF_2| = l.$$

Показать, что длина бóльшей полуоси эллипса зависит только от l и найти её. Выразить длину меньшей полуоси через l и фокусное расстояние $|F_1F_2|$. Выписать уравнение эллипса, выразив его коэффициенты через l, F_1 и F_2. Пользуясь этим результатом, выписать однопараметрическое семейство уравнений, задающих эллипсы с заданными фокусами и зависящих от параметра l.

Задача 4.

Явный вид дополнительного закона сохранения в эллиптическом бильярде.

Пусть E - эллипс, заданный как в предыдущей задаче: l, F_1 и F_2 даны. Рассмотрим пространство ориентированных прямых на плоскости с координатами r и ϕ на этом пространстве: для каждой ориентированной прямой L r - это радиус окружности с центром в точке O, касающейся прямой L, а ϕ - это азимут направляющего вектора прямой L. Обозначим через Λ_E геометрическое место ориентированных прямых, касающихся эллипса E и ориентирующих его против часовой стрелки. Показать, что Λ_E - замкнутая кривая и выписать ее уравнение в координатах r и ϕ. Точнее, выписать функцию от координат r и ϕ, постоянную на кривых $\Lambda_{E'}$ для всех меньших эллипсов E', софокусных с E. Вывод: эта функция инвариантна относительно бильярдного преобразования, другими словами, является первым интегралом.

Задача 5. Существование двупериодических орбит.

Доказать, что во всяком ограниченном выпуклом бильярде с гладкой границей всегда существует хотя бы одна двупериодическая орбита (т.е. с двумя отражениями от границы).

Задача 6. Свойство экстремальности периодических орбит.

Доказать, что если бильярд с гладкой границей имеет непрерывное однопараметрическое семейство периодических траекторий с одним и тем же заданным числом соударений с границей, то периметр соответствующих им ломаных постоянен: не зависит от параметра.

Примеры: а) правильные треугольные орбиты в круглом бильярде; б) прямоугольные орбиты в квадратном бильярде.

Задача 7.

Доказать, что периодическую орбиту в треугольном бильярде можно разрушить малым возмущением начального условия.

Задача 8. Гипотеза В.Я.Иврия для эллиптических бильярдов.

Доказать, что

а) в круговом

б) в эллиптическом бильярде

нет открытого множества (или что эквивалентно, двупараметрического семейства) периодических орбит.

Задача 9.

Доказать, что

а) в круговом

б) в эллиптическом бильярде

периодические траектории каждого периода существуют и образуют два однопараметрических семейства, параметризованных окружностью.

Задача 10.

Доказать, что бильярд на плоскости в произвольной из областей, ограниченной гиперболой, не имеет периодических орбит, за исключением одной двупериодической орбиты в бильярде между двумя ветвями гиперболы.

Задача 11.

Доказать, что в бильярде на плоскости с кусочно-вогнутой кусочно-гладкой границей гипотеза В.Я.Иврия верна: всякая периодическая траектория с заданным числом отражений разрушается малым возмущением.

Задача 12: комплексификация эллипса и изотропные касательные.

Рассмотрим комплексификацию эллипса: комплексную кривую на двумерной комплексной плоскости. Доказать, что изотропные прямые, проходящие через фокуса, касаются комплексифицированного эллипса. И обратно: всякая изотропная касательная к комплексифицированному эллипсу проходит через один из фокусов. Доказать, что у комплексифицированной окружности имеются ровно две различные изотропные касательные, и они пересекаются в центре окружности: соответствующие точки касания лежат на бесконечности.