Быстрорастущие функции («быстрее, выше, сильнее»)

Л.Д. Беклемишев

Математический институт им. В.А. Стеклова

21 июля 2012 г.

Псаммит (исчисление песчинок).

Государь Гелон!

Есть люди, думающие, что число песчинок бесконечно. Я не говорю о песке в окрестности Сиракуз и других местах Сицилии, но о всём его количестве как в странах населённых, так и необитаемых.

Другие думают, что хотя число это и не бесконечно, но большего себе представить невозможно.

Если бы эти последние вообразили массу песку в объёме земного шара, причём им были бы наполнены все моря и пропасти до вершин высочайших гор, то, конечно, они ещё меньше могли бы поверить, что легко назвать число, его превосходящее. ...

Псаммит (исчисление песчинок).

Государь Гелон!

Есть люди, думающие, что число песчинок бесконечно. Я не говорю о песке в окрестности Сиракуз и других местах Сицилии, но о всём его количестве как в странах населённых, так и необитаемых.

Другие думают, что хотя число это и не бесконечно, но большего себе представить невозможно.

Если бы эти последние вообразили массу песку в объёме земного шара, причём им были бы наполнены все моря и пропасти до вершин высочайших гор, то, конечно, они ещё меньше могли бы поверить, что легко назвать число, его превосходящее. . . .

Псаммит (исчисление песчинок).

Государь Гелон!

Есть люди, думающие, что число песчинок бесконечно. Я не говорю о песке в окрестности Сиракуз и других местах Сицилии, но о всём его количестве как в странах населённых, так и необитаемых.

Другие думают, что хотя число это и не бесконечно, но большего себе представить невозможно.

Если бы эти последние вообразили массу песку в объёме земного шара, причём им были бы наполнены все моря и пропасти до вершин высочайших гор, то, конечно, они ещё меньше могли бы поверить, что легко назвать число, его превосходящее. . . .

Концовка

. . .

Следовательно, ясно, что число песчинок, заключающихся в шаре неподвижных звёзд, предполагаемом Аристархом [Самосским], будет меньше тысячи мириад чисел «восьмых».

. . .

Впрочем, я со своей стороны нахожу, что было бы полезно, если бы и другие расследовали этот вопрос ещё обстоятельнее.

Концовка

...

Следовательно, ясно, что число песчинок, заключающихся в шаре неподвижных звёзд, предполагаемом Аристархом [Самосским], будет меньше тысячи мириад чисел «восьмых».

...

Впрочем, я со своей стороны нахожу, что было бы полезно, если бы и другие расследовали этот вопрос ещё обстоятельнее.

Греческая запись чисел

- *До тысячи*: буквы $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, ..., $\overline{\omega}$ и некоторые архаичные буквы.
- *Тысяча*: **,** (ставилась слева от цифры)
- *Десять тысяч*: **.** или *M (мириада)*

Пример: $\omega\mu\zeta.,\gamma\theta\varkappa\alpha = 8\,473\,421$.

Греческая запись чисел

- *До тысячи*: буквы $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, . . . , $\overline{\omega}$ и некоторые архаичные буквы.
- *Тысяча*: **,** (ставилась слева от цифры)
- *Десять тысяч*: **.** или *M (мириада)*

Пример: $\omega\mu\zeta.,\gamma\theta\varkappa\alpha = 8\,473\,421$.

Система Архимеда

Пусть $N = 10^8 =$ мириада мириад $=$ *октада*

Если уже есть имена чисел до X, мы можем породить имена чисел до X^2: $n = aX + b$, где $a, b < X$. Затем мы можем перейти от X^2 к $(X^2)^2$ и т.д.

Архимед же использовал более медленный процесс перехода

$$X \longmapsto X \cdot N.$$

Система Архимеда

Пусть $N = 10^8 =$ мириада мириад $=$ *октада*

Если уже есть имена чисел до X, мы можем породить имена чисел до X^2: $n = aX + b$, где $a, b < X$. Затем мы можем перейти от X^2 к $(X^2)^2$ и т.д.

Архимед же использовал более медленный процесс перехода

$$X \longmapsto X \cdot N.$$

Система Архимеда, продолжение

Первый период

$1 \dots N$ «первые»

$N \dots N^2$ «вторые»

$N^2 \dots N^3$ «третьи»

$\dots$ (N раз) $\dots$

$N^{N-1} \dots N^N$ «октада чисел октадных»

$P := N^N = 10^{8 \cdot 10^8}$ «первый период»

Второй период

$P \dots PN$ «первые»

$PN \dots PN^2$ «вторые»

$\dots$ (N раз) $\dots$

P^2 «второй период»

$\dots$ (N раз)

Система Архимеда, продолжение

Первый период

$1 \dots N$ «первые»

$N \dots N^2$ «вторые»

$N^2 \dots N^3$ «третьи»

$\dots$ (N раз) $\dots$

$N^{N-1} \dots N^N$ «октада чисел октадных»

$P := N^N = 10^{8 \cdot 10^8}$ «первый период»

Второй период

$P \dots PN$ «первые»

$PN \dots PN^2$ «вторые»

$\dots$ (N раз) $\dots$

P^2 «второй период»

$\dots$ (N раз)

Система Архимеда, продолжение

Первый период

$1 \ldots N$ «первые»

$N \ldots N^2$ «вторые»

$N^2 \ldots N^3$ «третьи»

$\ldots$ (N раз) $\ldots$

$N^{N-1} \ldots N^N$ «октада чисел октадных»

$P := N^N = 10^{8 \cdot 10^8}$ «первый период»

Второй период

$P \ldots PN$ «первые»

$PN \ldots PN^2$ «вторые»

$\ldots$ (N раз) $\ldots$

P^2 «второй период»

$\ldots$ (N раз)

Большие числа

- $P^N = (N^N)^N = 10^{8 \cdot 10^{16}}$
  «октада чисел октадных октадного периода»
  (По-видимому, самое большое число, кем-либо названное в античном мире.)
- Верхняя оценка числа песчинок во вселенной, по Архимеду: 10^{63}.

Функция Аккермана

(Wilhelm Ackermann, 1928)

$$\begin{cases} F_0(x) = x+1, \\ F_{n+1}(x) = F_n^{(x+1)}(x) = \underbrace{F_n(F_n(\dots F_n}_{x+1 \text{ раз}}(x)\dots)) \end{cases}$$

$F_\omega(x) := F_x(x)$ (функция Аккермана)

Вычисляем:

- $F_1(x) = F_0^{(x+1)}(x) = x + (x+1) = 2x+1$
- $F_2(x) > 2^{x+1} \cdot x$
- $F_3(x) > \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{x+1 \text{ раз}}$

Функция Аккермана

(Wilhelm Ackermann, 1928)

$$\begin{cases} F_0(x) = x + 1, \\ F_{n+1}(x) = F_n^{(x+1)}(x) = \underbrace{F_n(F_n(\ldots F_n}_{x+1 \text{ раз}}(x)\ldots)) \end{cases}$$

$F_\omega(x) := F_x(x)$ (функция Аккермана)

Вычисляем:

- $F_1(x) = F_0^{(x+1)}(x) = x + (x+1) = 2x + 1$
- $F_2(x) > 2^{x+1} \cdot x$
- $F_3(x) > \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{x+1 \text{ раз}}$

Обозначения Д. Кнута

(Donald Knuth, 1970s)

$x + y$ addition

$x \cdot y$ multiplication

$x \uparrow y := x^y$ exponentiation

$$x \uparrow\uparrow y := \underbrace{x \uparrow (x \uparrow (x \ldots \uparrow x))}_{y \text{ раз}}$$ tetration

$$x \uparrow^3 y := \underbrace{x \uparrow\uparrow (x \uparrow\uparrow (x \ldots \uparrow\uparrow x))}_{y \text{ раз}}$$ pentation

$F_\omega(x) \approx x \uparrow^x x$

Вариант Розы Петер

(Rósza Péter, 1934)

$$\varphi(x, 0) = x + 1$$
$$\varphi(0, n + 1) = \varphi(1, n)$$
$$\varphi(x + 1, n + 1) = \varphi(\varphi(x, n + 1), n)$$

$$Ackermann(x) := \varphi(x, x)$$

Вариант Розы Петер

(Rósza Péter, 1934)

$$\begin{array}{ll} \varphi(x,0) = x+1 & \varphi_0(x) = x+1 \\ \varphi(0,n+1) = \varphi(1,n) & \varphi_{n+1}(0) = \varphi_n(1) \\ \varphi(x+1,n+1) = \varphi(\varphi(x,n+1),n) & \varphi_{n+1}(x+1) = \varphi_n(\varphi_{n+1}(x)) \end{array}$$

Отсюда $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n^{(x+1)}(1)$

$F_\omega(x) \approx \varphi(x,x)$

Вариант Розы Петер

(Rósza Péter, 1934)

$$\begin{array}{ll} \varphi(x,0) = x+1 & \varphi_0(x) = x+1 \\ \varphi(0,n+1) = \varphi(1,n) & \varphi_{n+1}(0) = \varphi_n(1) \\ \varphi(x+1,n+1) = \varphi(\varphi(x,n+1),n) & \varphi_{n+1}(x+1) = \varphi_n(\varphi_{n+1}(x)) \end{array}$$

Отсюда $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n^{(x+1)}(1)$

$F_\omega(x) \approx \varphi(x,x)$

Вариант Розы Петер

(Rósza Péter, 1934)

$$
\begin{array}{ll}
\varphi(x,0) = x+1 & \varphi_0(x) = x+1 \\
\varphi(0,n+1) = \varphi(1,n) & \varphi_{n+1}(0) = \varphi_n(1) \\
\varphi(x+1,n+1) = \varphi(\varphi(x,n+1),n) & \varphi_{n+1}(x+1) = \varphi_n(\varphi_{n+1}(x))
\end{array}
$$

Отсюда $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n^{(x+1)}(1)$

$F_\omega(x) \approx \varphi(x,x)$

И что дальше?

$F_{\omega+1}(x) := F_\omega^{(x+1)}(x)$, ..., $F_{\omega+n+1}(x) := F_{\omega+n}^{(x+1)}(x)$, ...

Разумеется, $F_{\omega+\omega}(x) := F_{\omega+x}(x)$.

$F_0, F_1, F_2, \dots F_\omega, F_{\omega+1}, F_{\omega+2}, \dots, F_{\omega+\omega} = F_{\omega\cdot 2}, F_{\omega\cdot 2+1}, \dots$

$F_{\omega 2}, \dots, F_{\omega n}, \dots, F_{\omega\cdot\omega} = F_{\omega^2}$, где $F_{\omega^2}(x) := F_{\omega\cdot x}(x)$

Так можно довольно долго продолжать.

И что дальше?

$F_{\omega+1}(x) := F_{\omega}^{(x+1)}(x)$, ..., $F_{\omega+n+1}(x) := F_{\omega+n}^{(x+1)}(x)$, ...

Разумеется, $F_{\omega+\omega}(x) := F_{\omega+x}(x)$.

$F_0, F_1, F_2, \ldots F_\omega, F_{\omega+1}, F_{\omega+2}, \ldots, F_{\omega+\omega} = F_{\omega\cdot 2}, F_{\omega\cdot 2+1}, \ldots$

$F_{\omega 2}, \ldots, F_{\omega n}, \ldots, F_{\omega\cdot\omega} = F_{\omega^2}$, где $F_{\omega^2}(x) := F_{\omega\cdot x}(x)$

Так можно довольно долго продолжать.

И что дальше?

$F_{\omega+1}(x) := F_{\omega}^{(x+1)}(x)$, …, $F_{\omega+n+1}(x) := F_{\omega+n}^{(x+1)}(x)$, …

Разумеется, $F_{\omega+\omega}(x) := F_{\omega+x}(x)$.

$F_0, F_1, F_2, \dots F_{\omega}, F_{\omega+1}, F_{\omega+2}, \dots, F_{\omega+\omega} = F_{\omega\cdot 2}, F_{\omega\cdot 2+1}, \dots$

$F_{\omega 2}, \dots, F_{\omega n}, \dots, F_{\omega\cdot\omega} = F_{\omega^2}$, где $F_{\omega^2}(x) := F_{\omega\cdot x}(x)$

Так можно довольно долго продолжать.

И что дальше?

$F_{\omega+1}(x) := F_{\omega}^{(x+1)}(x)$, ..., $F_{\omega+n+1}(x) := F_{\omega+n}^{(x+1)}(x)$, ...

Разумеется, $F_{\omega+\omega}(x) := F_{\omega+x}(x)$.

$F_0, F_1, F_2, \ldots F_{\omega}, F_{\omega+1}, F_{\omega+2}, \ldots, F_{\omega+\omega} = F_{\omega\cdot 2}, F_{\omega\cdot 2+1}, \ldots$

$F_{\omega 2}, \ldots, F_{\omega n}, \ldots, F_{\omega\cdot\omega} = F_{\omega^2}$, где $F_{\omega^2}(x) := F_{\omega\cdot x}(x)$

Так можно довольно долго продолжать.

И что дальше?

$F_{\omega+1}(x) := F_{\omega}^{(x+1)}(x)$, ..., $F_{\omega+n+1}(x) := F_{\omega+n}^{(x+1)}(x)$, ...

Разумеется, $F_{\omega+\omega}(x) := F_{\omega+x}(x)$.

$F_0, F_1, F_2, \ldots F_{\omega}, F_{\omega+1}, F_{\omega+2}, \ldots, F_{\omega+\omega} = F_{\omega\cdot 2}, F_{\omega\cdot 2+1}, \ldots$

$F_{\omega 2}, \ldots, F_{\omega n}, \ldots, F_{\omega\cdot\omega} = F_{\omega^2}$, где $F_{\omega^2}(x) := F_{\omega\cdot x}(x)$

Так можно довольно долго продолжать.

Порядковые числа (ординалы)

- Имеем дело не с самими ординалами, а с их именами (конечными объектами)
- Совокупность имен наделена некоторой дополнительной структурой

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega 2$$
$$\omega 2, \ldots, \omega 3, \ldots, \omega n, \ldots, \omega^2$$
$$\omega^2, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^n, \ldots, \omega^\omega$$

$$\omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^2}, \ldots, \omega^{\omega^n}, \ldots \omega^{\omega^\omega}$$
$$\omega^{\omega^\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^2}}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}$$
$$\ldots$$
$$\varepsilon_0 := \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}.$$

Порядковые числа (ординалы)

- Имеем дело не с самими ординалами, а с их именами (конечными объектами)
- Совокупность имен наделена некоторой дополнительной структурой

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \omega 2$$
$$\omega 2, \ldots, \omega 3, \ldots, \omega n, \ldots, \omega^2$$
$$\omega^2, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^n, \ldots, \omega^\omega$$
$$\omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^2}, \ldots, \omega^{\omega^n}, \ldots \omega^{\omega^\omega}$$
$$\omega^{\omega^\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^2}}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}$$
$$\ldots$$
$$\varepsilon_0 := \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}.$$

Порядковые числа (ординалы)

- Имеем дело не с самими ординалами, а с их именами (конечными объектами)
- Совокупность имен наделена некоторой дополнительной структурой

$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega 2$
$\omega 2, \dots, \omega 3, \dots, \omega n, \dots, \omega^2$
$\omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^n, \dots, \omega^\omega$

$\omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^2}, \dots, \omega^{\omega^n}, \dots \omega^{\omega^\omega}$
$\omega^{\omega^\omega}, \dots, \omega^{\omega^{\omega^2}}, \dots, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}$
$\dots$
$\varepsilon_0 := \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}.$

Порядковые числа (ординалы)

- Имеем дело не с самими ординалами, а с их именами (конечными объектами)
- Совокупность имен наделена некоторой дополнительной структурой

$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega 2$
$\omega 2, \ldots, \omega 3, \ldots, \omega n, \ldots, \omega^2$
$\omega^2, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^n, \ldots, \omega^\omega$

$\omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^2}, \ldots, \omega^{\omega^n}, \ldots \omega^{\omega^\omega}$
$\omega^{\omega^\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^2}}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}$
$\ldots$
$\varepsilon_0 := \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}.$

Требования к быстрорастущей функции

- $f(x)$ определено при всех натуральных x;
- f вычислима (можем проверить $f(x) = y$ за конечное число шагов);
- f имеет простое определение.

Последовательность Гудстейна

(Reuben Goodstein, 1944)
Разложение a по основанию m:

$$a = m^{n_1} a_1 + m^{n_2} a_2 + \cdots + m^{n_k} a_k,$$

где $0 < a_i < m$ и $n_i > n_{i+1}$ для всех i.

Слабая последовательность Гудстейна для x:

- $x_0 := x$,
- $x_{n+1} := g_{n+2}(x_n) - 1$, где $g_m(a)$ есть результат замены m на $m + 1$ в разложении a по основанию m.

Пример

$x_0 := (10100)_2 = 20$

$x_1 = (10100)_3 - 1 = (10022)_3 =?$

$x_2 = (10022)_4 - 1 = (10021)_4 = 265$

$x_3 = (10021)_5 - 1 = (10020)_5 = 635$

$x_4 = (10020)_6 - 1 = (10015)_6 = 1307$

$\ldots$

$x_8 = (10012)_{10} - 1 = (10011)_{10} = 10011$

$x_9 = (10011)_{11} - 1 = (10010)_{11} = 14652$

$x_{10} = (10010)_{12} - 1 = (1000\,\underline{11})_{12} = 20747$

$\ldots$

Пример

$x_0 := (10100)_2 = 20$

$x_1 = (10100)_3 - 1 = (10022)_3 =?$

$x_2 = (10022)_4 - 1 = (10021)_4 = 265$

$x_3 = (10021)_5 - 1 = (10020)_5 = 635$

$x_4 = (10020)_6 - 1 = (10015)_6 = 1307$

$\dots$

$x_8 = (10012)_{10} - 1 = (10011)_{10} = 10011$

$x_9 = (10011)_{11} - 1 = (10010)_{11} = 14652$

$x_{10} = (10010)_{12} - 1 = (1000\,\underline{11})_{12} = 20747$

$\dots$

Слабая теорема Гудстейна

Теорема.

Для любого x слабая последовательность Гудстейна для x обрывается, т.е. $x_n = 0$ для некоторого n.

$WeakGoodstein(x) :=$ наименьшее n такое, что $x_n = 0$.

Теорема.

$WeakGoodstein(x) \approx F_\omega(x)$

Слабая теорема Гудстейна

Теорема.

Для любого x слабая последовательность Гудстейна для x обрывается, т.е. $x_n = 0$ для некоторого n.

$\mathit{WeakGoodstein}(x) :=$ наименьшее n такое, что $x_n = 0$.

Теорема.

$\mathit{WeakGoodstein}(x) \approx F_\omega(x)$

Слабая теорема Гудстейна

Теорема.

Для любого x слабая последовательность Гудстейна для x обрывается, т.е. $x_n = 0$ для некоторого n.

$\mathit{WeakGoodstein}(x) :=$ наименьшее n такое, что $x_n = 0$.

Теорема.

$\mathit{WeakGoodstein}(x) \approx F_\omega(x)$

Последовательность Гудстейна (сильная)

Полное разложение a по основанию m: разложим a,

$$a = m^{n_1} a_1 + m^{n_2} a_2 + \cdots + m^{n_k} a_k,$$

затем разложим все показатели степеней, и т.д., покуда не получим выражение, в которое входят только m и коэффициенты $< m$.

Пример:

$20 = 2^4 + 2^2 = 2^{2^2} + 2^2 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1}$

Последовательность Гудстейна

Последовательность Гудстейна для x:

- $x_0 := x$,
- $x_{n+1} := G_{n+2}(x_n) - 1$, где $G_m(a)$ есть результат замены m на $m+1$ в *полном* разложении a по основанию m.

$$x_0 = 2^{2^2} + 2^2 = 20$$
$$x_1 = (3^{3^3} + 3^3) - 1 = 3^{3^3} + 3^2 \cdot 2 + 3^1 \cdot 2 + 2 = 7625597485013$$
$$x_2 = (4^{4^4} + 4^2 \cdot 2 + 4^1 \cdot 2 + 2) - 1 \approx 10^{154}$$
$$x_3 = (5^{5^5} + 5^2 \cdot 2 + 5^1 \cdot 2 + 1) - 1$$
$$x_4 = (6^{6^6} + 6^2 \cdot 2 + 6^1 \cdot 1 + 5)$$
$$\dots$$
$$x_8 = (10^{10^{10}} + 10^2 \cdot 2 + 10^1 \cdot 1 + 1) = 10^{10^{10}} + 211,$$
$$\dots$$

Последовательность Гудстейна

Последовательность Гудстейна для x:

- $x_0 := x$,
- $x_{n+1} := G_{n+2}(x_n) - 1$, где $G_m(a)$ есть результат замены m на $m+1$ в *полном* разложении a по основанию m.

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 2^{2^2} + 2^2 = 20\\
&x_1 = (3^{3^3} + 3^3) - 1 = 3^{3^3} + 3^2 \cdot 2 + 3^1 \cdot 2 + 2 = 7625597485013\\
&x_2 = (4^{4^4} + 4^2 \cdot 2 + 4^1 \cdot 2 + 2) - 1 \approx 10^{154}\\
&x_3 = (5^{5^5} + 5^2 \cdot 2 + 5^1 \cdot 2 + 1) - 1\\
&x_4 = (6^{6^6} + 6^2 \cdot 2 + 6^1 \cdot 1 + 5)\\
&\ldots\\
&x_8 = (10^{10^{10}} + 10^2 \cdot 2 + 10^1 \cdot 1 + 1) = 10^{10^{10}} + 211,\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Теоремы Гудстейна и Париса–Кирби

Теорема.

Для любого x последовательность Гудстейна для x обрывается, т.е. $x_n = 0$ для некоторого n.

$Goodstein(x) :=$ наименьшее n такое, что $x_n = 0$.

(Jeff Paris, Laurie Kirby, 1982)

Теорема.

$Goodstein(x) \approx F_{\varepsilon_0}(x)$

Это значит, что $Goodstein(x) \gg F_\omega(x)$, $Goodstein(x) \gg F_{\omega \cdot \omega}(x)$ и много более того.

Теоремы Гудстейна и Париса–Кирби

Теорема.

Для любого x последовательность Гудстейна для x обрывается, т.е. $x_n = 0$ для некоторого n.

$Goodstein(x) :=$ наименьшее n такое, что $x_n = 0$.

(Jeff Paris, Laurie Kirby, 1982)

Теорема.

$Goodstein(x) \approx F_{\varepsilon_0}(x)$

Это значит, что $Goodstein(x) \gg F_\omega(x)$, $Goodstein(x) \gg F_{\omega\cdot\omega}(x)$ и много более того.

Теоремы Гудстейна и Париса–Кирби

Теорема.

Для любого x последовательность Гудстейна для x обрывается, т.е. $x_n = 0$ для некоторого n.

$Goodstein(x) :=$ наименьшее n такое, что $x_n = 0$.

(Jeff Paris, Laurie Kirby, 1982)

Теорема.

$Goodstein(x) \approx F_{\varepsilon_0}(x)$

Это значит, что $Goodstein(x) \gg F_\omega(x)$, $Goodstein(x) \gg F_{\omega\cdot\omega}(x)$ и много более того.

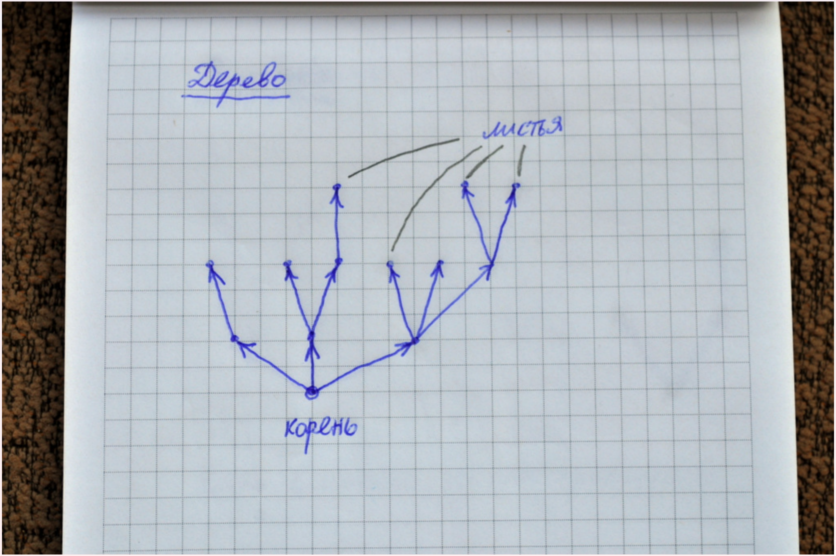
Кое-что о деревьях

Опр.

Дерево как ориентированный граф:

- ровно одна вершина не имеет входящих ребер (корень);
- все другие вершины имеют ровно одно входящее ребро;
- в любую вершину существует путь из корня.

В дереве между любыми двумя вершинами имеется не более одного пути.

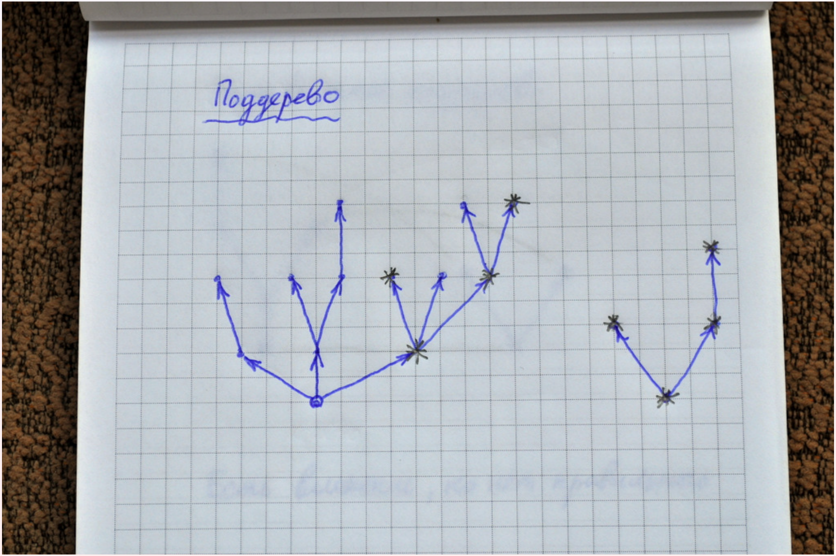

Дерево
листья
корень

Поддеревья

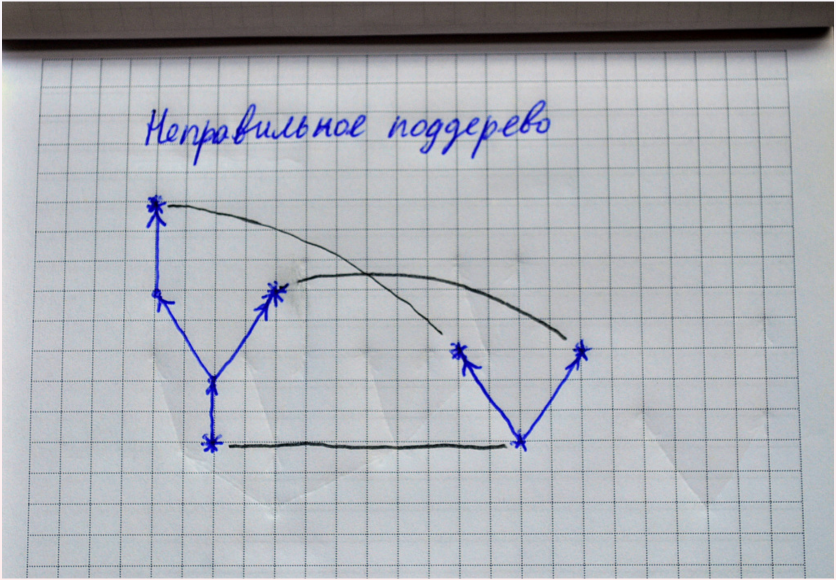
Любое подмножество A вершин дерева T распадается на некоторое количество деревьев. Считаем, что $a, b \in A$ соединены ребром, если в T есть путь из a в b, не проходящий через другую вершину из A.

- A называется *поддеревом* T, если A дерево (корень единственный).
- A называется *правильным поддеревом* T, если пути *в* T от любой вершины $a \in A$ к любым двум своим детям в A не имеют общих ребер.

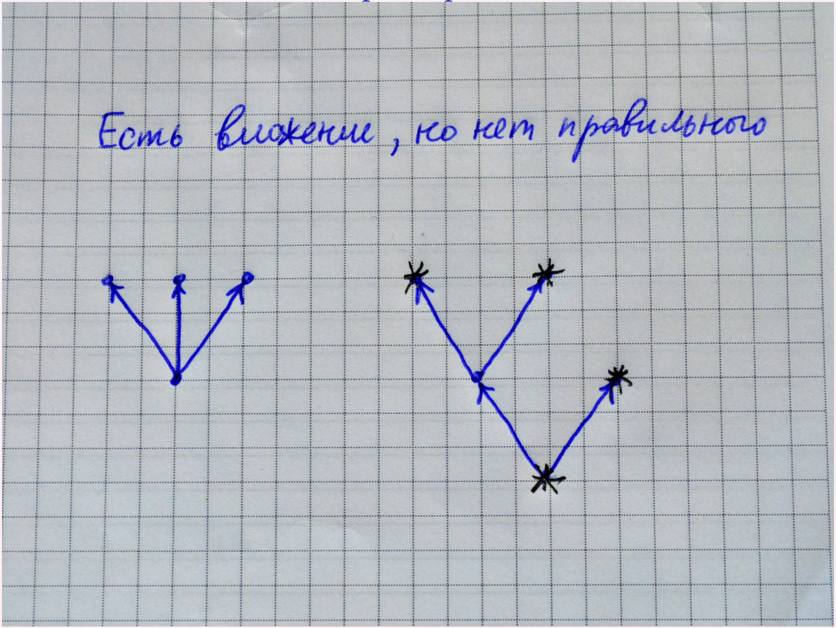
Примеры



Примеры



Примеры



Теорема Крускала

(J.B. Kruskal, 1960)
$T \trianglelefteq S$ означает, что T изоморфно правильному поддереву S.

Теорема.

В любой бесконечной последовательности конечных деревьев $T_0, T_1, T_2, \ldots$ найдутся $i < j$ такие, что $T_i \trianglelefteq T_j$.

(Harvey Friedman, 1985)

Теорема.

$\forall c\ \exists k$: для любой последовательности $\langle T_0, T_1, \ldots, T_k \rangle$ такой, что $|T_i| \leq c(i+1)$ для всех $i \leq k$, найдутся $i < j \leq k$: $T_i \trianglelefteq T_j$.

$FinKruskal(c) :=$ минимальный такой k.

Теорема Крускала

(J.B. Kruskal, 1960)
$T \trianglelefteq S$ означает, что T изоморфно правильному поддереву S.

Теорема.

В любой бесконечной последовательности конечных деревьев $T_0, T_1, T_2, \ldots$ найдутся $i < j$ такие, что $T_i \trianglelefteq T_j$.

(Harvey Friedman, 1985)

Теорема.

$\forall c\ \exists k$: для любой последовательности $\langle T_0, T_1, \ldots, T_k \rangle$ такой, что $|T_i| \le c(i+1)$ для всех $i \le k$, найдутся $i < j \le k$: $T_i \trianglelefteq T_j$.

$FinKruskal(c)$:= минимальный такой k.

Теорема Крускала

(J.B. Kruskal, 1960)
$T \trianglelefteq S$ означает, что T изоморфно правильному поддереву S.

Теорема.

В любой бесконечной последовательности конечных деревьев $T_0, T_1, T_2, \ldots$ *найдутся* $i < j$ *такие, что* $T_i \trianglelefteq T_j$.

(Harvey Friedman, 1985)

Теорема.

$\forall c\ \exists k :$ *для любой последовательности* $\langle T_0, T_1, \ldots, T_k \rangle$ *такой, что* $|T_i| \leq c(i+1)$ *для всех* $i \leq k$, *найдутся* $i < j \leq k : T_i \trianglelefteq T_j$.

$FinKruskal(c)$:= минимальный такой k.

Порядок роста

Теорема.

$\mathit{FinKruskal}(x) \gg \mathit{Goodstein}(x)$