

Вопросы по первой лекции
Л.Д. Беклемишева

Последовательность Гудстейна для $x \in \mathbb{N}$ определяется правилом $x_0 := x$ и $x_{n+1} = G_{n+2}(x_n) - 1$, где $G_m(y)$ есть результат замены $m \mapsto m + 1$ в *полном* разложении y по основанию m . Слабая последовательность Гудстейна определяется аналогично для обычного разложения по основанию m .

1. Докажите, что слабая последовательность Гудстейна, начинающаяся с любого натурального числа, обрывается.
2. (Поведение сильной последовательности Гудстейна, спасибо Федору Когану, задавшему вопрос)

Пусть x_0, x_1, x_2, \dots — последовательность Гудстейна для $x = x_0$ и $Goodstein(x)$ равно минимальному $n \in \mathbb{N}$ для которого $x_n = 0$.

- (a) Вычислите точные значения функции $Goodstein(2)$ и $Goodstein(3)$.

Проверьте, верны ли следующие утверждения:

- (b) Последовательность Гудстейна x_k можно разделить на три интервала: строгого возрастания, постоянства, и строгого убывания последовательности (вплоть до нуля).
- (c) Длина интервала убывания примерно равна длине интервала неубывания (то есть, $G(x)/2$).
- (d) Длина интервала постоянства примерно равна длине интервала возрастания.
- (e) Чему равно максимальное значение x_k ?