Задачи к лекции А. Скопенкова 23.07

Перед походом на лекцию обязательно решите задачи 1-4 (или вспомните их решения; если не получается, узнайте решение у любого преподавателя или некоторых участников школы). Буду рад проверить решения остальных задач (первые 17 устных решений и все письменные). Устные решения можно сдавать мне, например, в комнате 213-пр; письменные решения можно оставлять в 213 шкафу в коридоре. Условия задач можно брать там же или в Оргкомитете на компьютере.

Обозначим $\varepsilon := \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (в задачах 1 и 2).

1. Докажите тождество:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon).$$

2. Решите систему уравнений (x, y, z — неизвестные, a, b, c — известные):

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z=b \\ x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z=c \end{cases}$$

Рассмотрим калькулятор с кнопками

$$1, \quad +, \quad -, \quad \times, \quad : \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{} \quad \text{для любого } n.$$

Калькулятор вычисляет числа с абсолютной точностью и имеет неограниченную память. При делении на 0 он выдает ошибку. Калькулятор *комплексный*, т.е. оперирует с комплексными числами и при нажатии кнопки $\sqrt[n]{}$ выдает все значения корня.

3. Получите на калькуляторе число $\cos\dfrac{2\pi}{n}$, используя извлечения только квадратных корней, для $n=3,4,5,6,8,10,15$.

4. (a) На калькуляторе можно получить число $\cos\dfrac{2\pi}{n}$, используя извлечения только корней степени менее 5, тогда и только тогда, когда на нем можно получить число $\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, используя извлечения только корней степени менее 5. (Заметим, что на калькуляторе нет кнопок Re и Im.)

(b) Можно ли получить число e на калькуляторе, если уже есть число $e+\pi i$? (Используйте без доказательства, что числа e и π невозможно получить на калькуляторе.)

Теорема Гаусса. *Число* $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ *можно получить на калькуляторе, используя извлечения корней только степеней, строго меньших* n.

5. Выведите теорему Гаусса для произвольных p из теоремы Гаусса для простых p.

6. Обозначим

$$\varepsilon := \cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5} \quad \text{и} \quad T(x):=x+\varepsilon x^2+\varepsilon^2x^4+\varepsilon^3x^8+\varepsilon^4x^{16}+\dots+\varepsilon^9x^{512}.$$

Тогда многочлены $T(x)$ и $\varepsilon T(x^2)$ сравнимы по модулю многочлена $x^{11}-1$ (т.е. их разность делится на $x^{11}-1$).

7. Докажите, что на калькуляторе можно получить число $\cos\dfrac{2\pi}{n}$, используя извлечения корней только не более, чем пятой степени, для (7) $n=7$; (11) $n=11$.

8. Для каких n можно получить на *вещественном* калькуляторе число $\cos\dfrac{2\pi}{n}$? *Вещественный* калькулятор имеет те же кнопки, что и комплексный, но оперирует с вещественными числами и при извлечении корня четной степени из отрицательного числа выдает ошибку. (Решение этой задачи мне неизвестно.)

Задачи к миникурсу 'В направлении Галуа' А. Скопенкова

На миникурсе (в противоположность лекции) будут в основном разбираться результаты о *неразрешимости* в радикалах. В частности, материал миникурса независим от материала лекции.

Перед походом на первое занятие обязательно решите задачи 9 (или вспомните их решения; если не получается, узнайте решение у любого преподавателя или некоторых участников школы). Остальные задачи, хоть и формулируются просто, не являются наиболее простыми в миникурсе. На примере их решения будет разбираться теория: для их решения потребуются леммы, которые формулируются менее просто и красиво и будут даны на занятиях. Решения задач со звездочками мне неизвестны (возможно, они известны другим преподавателям Школы). Буду рад проверить решения задач 10-13 (первые 17 устных и все письменные). Задачи, не разобранные на очередном занятии, продолжайте решать после него, используя полученные знания. Устные решения можно сдавать мне, например, в комнате 213-пр; письменные решения можно оставлять в 213 шкафу в коридоре. Условия задач можно брать там же или в Оргкомитете на компьютере.

Через $\mathbb{Q}$ обозначается множество всех рациональных чисел. 'Многочлен с рациональными коэффициентами' мы коротко называем многочленом. Многочлен называется *неприводимым*, если он не раскладывается в произведение многочленов меньшей степени. Если условие задачи является утверждением, то в задаче требуется это утверждение доказать.

9. (a) **Лемма о линейной независимости.** Если $a+b\sqrt{2}=0$ для некоторых $a,b\in\mathbb{Q}$, то $a=b=0$.

(b) **Лемма о сопряжении.** Если $a,b\in\mathbb{Q}$ и $a+b\sqrt{2}$ — корень многочлена, то $a-b\sqrt{2}$ — тоже его корень.

(c) **Утверждение.** Если многочлен степени выше второй неприводим, то ни один из его корней не представим в виде $a+\sqrt{b}$, где $a,b\in\mathbb{Q}$.

10. Для каких n число $\cos(2\pi/n)$

(a) рационально? (b)* представимо в виде $a+\sqrt{b}$, где $a,b\in\mathbb{Q}$?

11. Представимо ли следующее число в виде $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, где $a,b,c\in\mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/9)$; (c) $\sqrt[5]{3}$.

12. Представимо ли число (a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/21)$; (c) $\sqrt[9]{3}$; (d)* $\sqrt[7]{3}$ в виде $a_0+a_1\sqrt[7]{2}+a_2\sqrt[7]{2^2}+\dots+a_6\sqrt[7]{2^6}$, где $a_0,a_1,a_2,\dots,a_6\in\mathbb{Q}$?

13. (3R) Как по многочлену третьей степени узнать, имеет ли он корень вида $a+br+cr^2$, где $a,b,c,r^3\in\mathbb{Q}$ и $r\in\mathbb{R}$?

(3C) То же для $r\in\mathbb{C}$.

(3Rn), (3Cn), Те же вопросы для корня вида $a_0+a_1r+a_2r^2+\dots+a_{n-1}r^{n-1}$, где $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 1$, $a_0,a_1,\dots,a_{n-1},r^n\in\mathbb{Q}$ и $r\in\mathbb{R}$? (Иными словами, как по многочлену третьей степени узнать, имеет ли он корень, который можно получить на вещественном/комплексном калькуляторе так, чтобы извлечение корня происходило только один раз?)

(4R)*, (4C)*, (4Rn)*, (4Cn)* Те же вопросы для многочленов четвертой степени.

Задачи ко 2-му занятию миникурса 'В направлении Галуа' А. Скопенкова

Условия задач можно брать в 213 шкафу в коридоре или в Оргкомитете на компьютере. 'Обязательные' задачи: 14, 15abc, 17.

14. Докажите, что на комплексном калькуляторе можно получить число ε_7 так, чтобы только один раз извлекать корень третьей степени и не извлекать корней большей степени.

Указание. $\varepsilon_7^6+\varepsilon_7^5+\dots+\varepsilon_7+1=0$. Как решать алгебраические уравнения n-й степени, у которых коэффициенты при k-й и при $(n-k)$-й степенях равны?

15. Решите в рациональных числах уравнение $a+\sqrt{b}=$
(a) $\sqrt[3]{2}$; (b) $\cos(2\pi/9)$; (c) $\cos(2\pi/7)$; (d) $\cos(2\pi/13)$.

16. Многочлен $x^{12}+x^{11}+\dots+x+1$ неприводим над (a) $\mathbb{Z}$; (a) $\mathbb{Q}$.

Если $F\subset\mathbb{C}$, $r\in\mathbb{C}$ и $r^2\in F$ для некоторого целого положительного q, то обозначим $F[r]:=\{a_0+a_1r\mid a_0,a_1\in F\}$.

Число x *комплексно построимо*, если существуют такие $r_1,\dots r_{s-1}\in\mathbb{C}$, что

$$\mathbb{Q}=F_1\subset F_2\subset F_3\subset\ldots\subset F_{s-1}\subset F_s\ni x,\quad \text{где}\quad r_k^2\in F_k,\quad r_k\notin F_k\quad \text{и}\quad F_{k+1}=F_k[r_k]$$

для любого $k=1,\dots,s-1$. Такая последовательность называется *башней расширений.*

17. *Полем* называется подмножество множества $\mathbb{C}$, замкнутое относительно операций сложения, умножения, взятия противоположного числа и деления на ненулевое число. Если F поле, то $F[r]$ поле.

18. Числа из задачи 15 не являются комплексно построимыми.

19. Пусть $\mathbb{Q}=F_1\subset F_2\subset F_3\ni\alpha\notin F_2$ — башня расширений и $P(\alpha)=0$ для некоторого многочлена P с коэффициентами из F_2, неприводимого над F_2. Тогда $\deg P=4$.

Задачи ко 2-му занятию миникурса 'В направлении Галуа' А. Скопенкова

Условия задач можно брать в 213 шкафу в коридоре или в Оргкомитете на компьютере. 'Обязательные' задачи: 14, 15abc, 17.

14. Докажите, что на комплексном калькуляторе можно получить число ε_7 так, чтобы только один раз извлекать корень третьей степени и не извлекать корней большей степени.

Указание. $\varepsilon_7^6+\varepsilon_7^5+\dots+\varepsilon_7+1=0$. Как решать алгебраические уравнения n-й степени, у которых коэффициенты при k-й и при $(n-k)$-й степенях равны?

15. Решите в рациональных числах уравнение $a+\sqrt{b}=$
(a) $\sqrt[3]{2}$; (b) $\cos(2\pi/9)$; (c) $\cos(2\pi/7)$; (d) $\cos(2\pi/13)$.

16. Многочлен $x^{12}+x^{11}+\dots+x+1$ неприводим над (a) $\mathbb{Z}$; (a) $\mathbb{Q}$.

Если $F\subset\mathbb{C}$, $r\in\mathbb{C}$ и $r^2\in F$ для некоторого целого положительного q, то обозначим $F[r]:=\{a_0+a_1r\mid a_0,a_1\in F\}$.

Число x *комплексно построимо*, если существуют такие $r_1,\dots r_{s-1}\in\mathbb{C}$, что

$$\mathbb{Q}=F_1\subset F_2\subset F_3\subset\ldots\subset F_{s-1}\subset F_s\ni x,\quad \text{где}\quad r_k^2\in F_k,\quad r_k\notin F_k\quad \text{и}\quad F_{k+1}=F_k[r_k]$$

для любого $k=1,\dots,s-1$. Такая последовательность называется *башней расширений.*

17. *Полем* называется подмножество множества $\mathbb{C}$, замкнутое относительно операций сложения, умножения, взятия противоположного числа и деления на ненулевое число. Если F поле, то $F[r]$ поле.

18. Числа из задачи 15 не являются комплексно построимыми.

19. Пусть $\mathbb{Q}=F_1\subset F_2\subset F_3\ni\alpha\notin F_2$ — башня расширений и $P(\alpha)=0$ для некоторого многочлена P с коэффициентами из F_2, неприводимого над F_2. Тогда $\deg P=4$.

Задачи к 3-му занятию (26.07) миникурса 'В направлении Галуа' А. Скопенкова

Условия задач можно брать в 213 шкафу в коридоре или в Оргкомитете на компьютере. 'Обязательные' задачи: 11abc, 20abcde, 21abc.

20. Пусть $\varepsilon := \varepsilon_3$, $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ и $r^3, a, b, c \in \mathbb{Q}$.

(a) **Лемма о сопряжении.** Если многочлен имеет корень $a + br + cr^2$, тогда корнями этого многочлена являются также числа $a + b\varepsilon r + c\varepsilon^2 r^2$ и $a + b\varepsilon^2 r + c\varepsilon r^2$.

(b) Если $a + br + cr^2 = 0$, то $a = b = c = 0$.

(c) **Лемма о линейной независимости.** Если $k + lr + mr^2 = 0$ для некоторых $k, l, m \in \mathbb{Q}[\varepsilon] := \{x + y\varepsilon \ : \ x, y \in \mathbb{Q}\}$, то $k = l = m = 0$.

(d) **Лемма о вещественности.** Числа

$$(*) \quad a + br + cr^2, \quad a + br\varepsilon + cr^2\varepsilon^2 \quad \text{и} \quad a + br\varepsilon^2 + cr^2\varepsilon$$

не могут быть тремя попарно различными вещественными числами.

(e) **Лемма о рациональности.** Кубический многочлен с корнями (*) и коэффициентом 1 при x^3 имеет рациональные коэффициенты.

Обозначим для $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$$\widehat{F} := \{a + br + cr^2 \mid r \in F, \ a, b, c, r^3 \in \mathbb{Q}\}.$$

21. (a,b,c) Какие из чисел задачи 11 лежат в $\widehat{\mathbb{R}}$?

22. (a,b,c) Какие из чисел задачи 11 лежат в $\widehat{\mathbb{C}}$?

(d) Лежит ли $i\sqrt{3}$ в $\widehat{\mathbb{C}}$?

23. Утверждение. (a) Квадратный многочлен имеет корень из $\widehat{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда он имеет рациональный корень.

(b) Квадратный многочлен имеет корень из $\widehat{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда либо он имеет рациональный корень, либо его дискриминант имеет вид $-3h^2$ для некоторого $h \in \mathbb{Q}$.

(c) Если многочлен степени 3 неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет три вещественных корня, то ни один из них не лежит в ни в $\widehat{\mathbb{R}}$, ни в $\widehat{\mathbb{C}}$.

(d) Если многочлен степени выше 3 неприводим над $\mathbb{Q}$, то ни один из его корней не лежит ни в $\widehat{\mathbb{R}}$, ни в $\widehat{\mathbb{C}}$.

24. Следующие многочлены неприводимы над $\mathbb{Q}$:

(a) $x^5 - 4$; (b) $x^q - a$, где q простое, $a \in \mathbb{Q}$ и $\sqrt[q]{a} \notin \mathbb{Q}$.

25. Пусть q нечетное простое, A — многочлен меньше q, $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ и $r^q \in \mathbb{Q}$.

(a) Если $A(r) = 0$, то $A = 0$.

(b) **Лемма о сопряжении.** Если многочлен имеет корень $A(r)$, то он имеет также корни $A(r\varepsilon_q^k)$ для каждого $k = 1, 2, 3, \ldots, q - 1$.

(c) **Лемма о неприводимости.** Многочлен $x^q - r^q$ неприводим над $\mathbb{Q}[\varepsilon_q]$.

(d) **Лемма о линейной независимости.** Если $B \in \mathbb{Q}[\varepsilon_q][x]$ — многочлен степени меньше q с коэффициентами в $\mathbb{Q}[\varepsilon_q]$ и $B(r) = 0$, то $B = 0$.

(e) **Лемма о вещественности.** Пусть числа $A(r\varepsilon_q^k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, q - 1$, попарно различны. Тогда среди них ровно одно вещественное.

(f) **Лемма о рациональности.** Многочлен $(x - A(r))(x - A(r\varepsilon_q)) \ldots (x - A(r\varepsilon_q^{q-1}))$ имеет рациональные коэффициенты.

Следующее утверждение интересно и нетривиально даже для многочленов степени 3.

26. Утверждение. Если многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет более одного вещественного корня, то ни один из его корней не получается на калькуляторе так, чтобы корень извлекался только один раз, причем простой нечетной степени, т.е. ни один из его корней не представим в виде $A(r)$ ни для каких многочлена A, простого нечетного q и

(a) $r \in \mathbb{R}$, причем $r^q \in \mathbb{Q}$. (b) $r \in \mathbb{C}$, причем $r^q \in \mathbb{Q}$ и $\sqrt[q]{r^q} \notin \mathbb{Q}$.

Задачи к 4-му занятию (28.07) миникурса 'В направлении Галуа' А. Скопенкова

'Обязательные' задачи: 18, 27ab, 28ab, 29a, 30.

27. (a) *Лемма Гаусса.* Если многочлен с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим и над $\mathbb{Q}$.

(b) *Признак Эйзенштейна.* Пусть p простое. Если для многочлена с целыми коэффициентами старший коэффициент не делится на p, остальные делятся на p, а свободный член не делится на p^2, то этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

28. (a) Многочлен $x^6 + x^3 + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

(b) Выведите непостроимость числа ε_9 из (a).

(c) Многочлен $x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

(d) Выведите непостроимость числа ε_{25} из (c).

(e) Докажите непостроимость в теореме Гаусса.

29. (a) Если многочлен третьей степени имеет ровно один вещественный корень, то этот корень можно получить на вещественном калькуляторе, причем так, чтобы извлечение корня происходило только два раза, один раз второй и один раз третьей степени.

(b) Можно ли число $\cos(2\pi/9)$ получить на вещественном калькуляторе так, чтобы извлечение корня происходило только два раза, причем оба раза простой степени?

30. (a-f) Докажите аналоги утверждений задачи 25 с заменой $\mathbb{Q}$ на произвольное поле $F \subset \mathbb{R}$ (и многочленов с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ на многочлены с коэффициентами в F).

31. (a) Ни один из корней многочлена $8x^3 - 6x + 1$ невозможно получить на вещественном калькуляторе.

(b) Если кубический многочлен имеет три иррациональных вещественных корня, то ни один из них невозможно получить на вещественном калькуляторе.

(c) Если многочлен простой степени > 2 неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет более одного вещественного корня, то ни один из них невозможно получить на вещественном калькуляторе.

Задачи к 4-му занятию (28.07) миникурса 'В направлении Галуа' А. Скопенкова

'Обязательные' задачи: 18, 27ab, 28ab, 29a, 30.

27. (a) *Лемма Гаусса.* Если многочлен с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим и над $\mathbb{Q}$.

(b) *Признак Эйзенштейна.* Пусть p простое. Если для многочлена с целыми коэффициентами старший коэффициент не делится на p, остальные делятся на p, а свободный член не делится на p^2, то этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

28. (a) Многочлен $x^6 + x^3 + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

(b) Выведите непостроимость числа ε_9 из (a).

(c) Многочлен $x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

(d) Выведите непостроимость числа ε_{25} из (c).

(e) Докажите непостроимость в теореме Гаусса.

29. (a) Если многочлен третьей степени имеет ровно один вещественный корень, то этот корень можно получить на вещественном калькуляторе, причем так, чтобы извлечение корня происходило только два раза, один раз второй и один раз третьей степени.

(b) Можно ли число $\cos(2\pi/9)$ получить на вещественном калькуляторе так, чтобы извлечение корня происходило только два раза, причем оба раза простой степени?

30. (a-f) Докажите аналоги утверждений задачи 25 с заменой $\mathbb{Q}$ на произвольное поле $F \subset \mathbb{R}$ (и многочленов с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ на многочлены с коэффициентами в F).

31. (a) Ни один из корней многочлена $8x^3 - 6x + 1$ невозможно получить на вещественном калькуляторе.

(b) Если кубический многочлен имеет три иррациональных вещественных корня, то ни один из них невозможно получить на вещественном калькуляторе.

(c) Если многочлен простой степени > 2 неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет более одного вещественного корня, то ни один из них невозможно получить на вещественном калькуляторе.